Intégration sur un intervalle quelconque

Intégrabilité

Exercice 1 [00657] [Correction]
Etudier l'existence des intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1-t)\sqrt{t}}$ b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(t)\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$
d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t)}{t^{3/2}}\,\mathrm{d}t$ e) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln(1+t^2)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ f) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t$

Exercice 2 [02349] [Correction]
Etudier l'existence des intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\,\mathrm{e}^{-\sqrt{t}}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{(1-t)^3}}\,\mathrm{d}t$ c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^t-1}$
d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(\ln t)^2}\mathrm{d}t$ e) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t\arctan t}\,\mathrm{d}t$ f) $\displaystyle\int_0^{+\infty} t+2-\sqrt{t^2+4t+1}\,\mathrm{d}t$

Exercice 3 [03385] [Correction]
a) Etudier l'intégrabilité sur $]1,+\infty[$ de

$$f(x)=\frac{\sqrt{\ln x}}{(x-1)\sqrt{x}}$$

b) Montrer

$$\int_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{\ln 3}{2}$$

Exercice 4 [03221] [Correction]
Etudier l'existence de

$$\int_0^{+\infty} \ln(\operatorname{th} t)\,\mathrm{d}t$$

Exercice 5 [00661] [Correction]
Montrer que les fonctions $t\mapsto \sin t$ et $t\mapsto \frac{\sin t}{t}$ ne sont pas intégrables sur $[0,+\infty[$.

Exercice 6 [00183] [Correction]
Etudier l'intégrabilité en 0 de

$$f : x\mapsto \int_1^x \frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 7 [03206] [Correction]
Soit $f:[1,+\infty[\to\mathbb{R}$ continue vérifiant

$$\forall x,a\geqslant 1,\ 0\leqslant f(x)\leqslant \frac{a}{x^2}+\frac{1}{a^2}$$

La fonction f est-elle intégrable sur $[1,+\infty[$?

Exercice 8 [03441] [Correction]
Soit $f:[0,+\infty[\to\mathbb{R}$ une fonction continue, positive et décroissante.
On pose $g:[0,+\infty[\to\mathbb{R}$ donnée par

$$g(x)=f(x)\sin x$$

Montrer que les intégrabilités de f et de g sont équivalentes.

Exercice 9 [03627] [Correction]
Soit $f:[0,+\infty[\to\mathbb{R}$ continue et positive. On suppose

$$\frac{f(x+1)}{f(x)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell\in[0,1[$$

Déterminer la nature de $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 10 [03442] [Correction]
Soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ donnée par

$$f(x)=x^2\cos\left(1/x^2\right) \text{ si } x\in\,]0,1] \text{ et } f(0)=0$$

Montrer que f est dérivable sur $[0,1]$ mais que sa dérivée f' n'est pas intégrable sur $]0,1]$.

Exercice 11 [01770] [Correction]
Soit g définie sur $\mathbb{R}^{+\star}$ par
$$g(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$
où f est continue, de carré intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
a) Etudier le prolongement par continuité de g en 0.
b) Exprimer $g'(x)$ en fonction de $f(x)$ et de $g(x)$ pour $x > 0$.
c) Pour $0 < a < b$, montrer que
$$\int_a^b g^2(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t + ag^2(a) - bg^2(b)$$
puis montrer que
$$\sqrt{\int_a^b g^2(t)\,\mathrm{d}t} \leqslant \sqrt{\int_0^{+\infty} f^2(t)\,\mathrm{d}t} + \sqrt{ag^2(a) + \int_0^{+\infty} f^2(t)\,\mathrm{d}t}$$
d) Etudier la nature de
$$\int_0^{+\infty} g^2(t)\,\mathrm{d}t$$

Exercice 12 [03753] [Correction]
[Inégalité de Hardy]
Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue et de carré intégrable. Pour $x > 0$, on pose
$$g(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$
a) Montrer que g^2 est intégrable sur $]0, +\infty[$ et que
$$\int_0^{+\infty} g^2(t)\,\mathrm{d}t \leqslant 4\int_0^{+\infty} f^2(t)\,\mathrm{d}t$$
b) Montrer que fg est intégrable et
$$\int_0^{+\infty} g^2(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{+\infty} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

Exercice 13 [03053] [Correction]
Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que f et f'' sont de carrés intégrables.
a) Montrer que f' est de carré intégrable.
b) Montrer :
$$\left(\int_{\mathbb{R}} f'^2\right)^2 \leqslant \left(\int_{\mathbb{R}} f^2\right)\left(\int_{\mathbb{R}} f''^2\right)$$

Intégrabilité dépendant de paramètres

Exercice 14 [00658] [Correction]
Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur les paramètres réels a et b pour que les intégrales suivantes existent :
$$\text{a) } \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^a(t-1)^b} \quad \text{b) } \int_0^{+\infty} \frac{t^a}{1+t^b}\,\mathrm{d}t \quad \text{c) } \int_0^{+\infty} \frac{t^a \mathrm{e}^{-t}}{1+t^b}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 15 [00659] [Correction]
[Intégrales de Bertrand]
Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ on étudie la nature de l'intégrale
$$\int_{\mathrm{e}}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha(\ln t)^\beta}$$
a) On suppose $\alpha > 1$. Montrer que l'intégrale étudiée converge.
b) On suppose $\alpha = 1$. Calculer
$$\int_{\mathrm{e}}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{t(\ln t)^\beta}$$
et déterminer pour quels $\beta \in \mathbb{R}$ l'intégrale étudiée converge.
c) On suppose $\alpha < 1$, en exploitant
$$\frac{t}{t^\alpha(\ln t)^\beta} \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$$
établir que l'intégrale étudiée diverge.

Exercice 16 [00660] [Correction]
Enoncer une condition nécessaire et suffisante sur $\alpha \in \mathbb{R}$ pour l'existence de
$$\int_0^{+\infty} \frac{t - \sin t}{t^\alpha}\mathrm{d}t$$

Exercice 17 [03705] [Correction]
a) a désigne un réel strictement supérieur à -1. En posant $x = \tan t$, montrer
$$\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{1 + a\sin^2(t)} = \frac{\pi}{2\sqrt{1+a}}$$

b) Donner en fonction de $\alpha > 0$, la nature de la série

$$\sum \int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}t}{1+(n\pi)^\alpha \sin^2(t)}$$

c) Même question pour

$$\sum \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha \sin^2(t)}$$

d) Donner la nature de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha \sin^2(t)}$$

Intégrabilité et comportement asymptotique

Exercice 18 [00662] [Correction]
Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que f et f' sont intégrables sur $[0,+\infty[$.
Montrer que f tend vers 0 en $+\infty$.

Exercice 19 [03440] [Correction]
Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.
On suppose que f^2 et f'^2 sont intégrables. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

Exercice 20 [03231] [Correction]
Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux.
On suppose que f est intégrable. Montrer

$$\int_x^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

Exercice 21 [00663] [Correction]
Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue, décroissante et intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
a) Montrer que f tend vers zéro en $+\infty$.
b) Montrer que $xf(x)$ tend vers zéro quand $x \to +\infty$
c) Si on supprime l'hypothèse décroissante, déterminer un exemple de fonction f continue et intégrable sur $\mathbb{R}^+$ telle que f ne tend pas vers zéro en $+\infty$.

Exercice 22 [03232] [Correction]
Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux et décroissante.
On suppose que f est intégrable. Montrer

$$xf(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

Exercice 23 [03238] [Correction]
Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ continue par morceaux et intégrable.
Montrer qu'il existe une suite (x_n) de réels positifs vérifiant

$$x_n \to +\infty \text{ et } x_n f(x_n) \to 0$$

Exercice 24 [02829] [Correction]
Donner un exemple de $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^+)$ intégrable et non bornée.

Exercice 25 [00572] [Correction]
Soit $f \in \mathcal{C}^2([0,+\infty[\,,\mathbb{R})$. On suppose que f et f'' sont intégrables.
a) Montrer que $f'(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$.
b) Montrer que $f.f'$ est intégrable.

Exercice 26 [03901] [Correction]
Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue de carré intégrable. Montrer

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\sqrt{x}\right)$$

Calcul d'intégrales

Exercice 27 [00666] [Correction]
Calculer les intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t+1)(t+2)}$ b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(\mathrm{e}^t+1)(\mathrm{e}^{-t}+1)}$ c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t$
d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ e) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$

Exercice 28 [02350] [Correction]
Calculer les intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{\mathrm{e}^t+1}}$ b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\operatorname{sh}t}$ c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\ln t}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t$
d) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2\sqrt{1+t^2}}$ e) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$

Exercice 29 [00667] [Correction]
Calculer les intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin x\ln(\sin x)\mathrm{d}x$ c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{1-t}}\,\mathrm{d}t$
d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt[3]{x}}$ e) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x(1+x)}\,\mathrm{d}x$ f) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(1+x)^{1/3}-1}{x(1+x)^{2/3}}\,\mathrm{d}x$
g) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{2+\cos x}$ h) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2(x)}{3\cos^2(x)+1}\,\mathrm{d}x$ i) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x-x^2}}$

Exercice 30 [00670] [Correction]
a) Calculer
$$J=\int_0^{+\infty}\frac{t\,\mathrm{d}t}{1+t^4}$$
b) Etablir
$$I=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^4}=\int_0^{+\infty}\frac{t^2\,\mathrm{d}t}{1+t^4}$$
c) En factorisant $1+t^4$ déterminer la valeur de I.

Exercice 31 [03237] [Correction]
Justifier et calculer
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)(1+it)}$$

Exercice 32 [00672] [Correction]
a) Justifier l'existence de
$$I=\int_0^1\frac{t-1}{\ln t}\,\mathrm{d}t$$
b) Etablir
$$I=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-2x}}{x}\,\mathrm{d}x$$
c) En séparant cette dernière intégrale en deux, observer
$$I=\lim_{\varepsilon\to0}\int_\varepsilon^{2\varepsilon}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x$$
puis donner la valeur de I.

Exercice 33 [00676] [Correction]
a) Justifier l'existence de
$$I=\int_0^{+\infty}\frac{\sin^3 t}{t^2}\,\mathrm{d}t$$
Pour $x>0$, on pose
$$I(x)=\int_x^{+\infty}\frac{\sin^3 t}{t^2}\,\mathrm{d}t$$
b) On rappelle $\sin 3a=3\sin a-4\sin^3 a$. Etablir que
$$I(x)=\frac{3}{4}\int_x^{3x}\frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t$$
c) En déduire la valeur de I.

Exercice 34 [00673] [Correction]
[Intégrales d'Euler]
On pose
$$I=\int_0^{\pi/2}\ln(\sin t)\,\mathrm{d}t \text{ et } J=\int_0^{\pi/2}\ln(\cos t)\,\mathrm{d}t$$
Montrer que les intégrales I et J sont bien définies et égales.
Calculer $I+J$ et en déduire les valeurs de I et J.

Exercice 35 [00675] [Correction]
Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction continue telle que
$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\ell\in\mathbb{R},\ \lim_{x\to-\infty}f(x)=\ell'\in\mathbb{R}$$
Justifier l'existence et donner la valeur de
$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(t+1)-f(t)\,\mathrm{d}t$$

Exercice 36 [01334] [Correction]
Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ admettant une limite finie ℓ en $-\infty$ et telle que $\int_0^{+\infty} f$ existe.
Justifier l'existence, puis calculer :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(f(a+x) - f(b+x)\right)\,\mathrm{d}x$$

Exercice 37 [00677] [Correction]
Existence et valeur de

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(2x) - \arctan x}{x}\,\mathrm{d}x$$

Exercice 38 [01333] [Correction]
Calculer

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4+x^8}$$

Exercice 39 [03375] [Correction]
a) Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{e}^x \geqslant 1 + x$$

En déduire

$$\forall t \in \mathbb{R}, 1 - t^2 \leqslant \mathrm{e}^{-t^2} \leqslant \frac{1}{1+t^2}$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Etablir l'existence des intégrales suivantes

$$I = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t,\ I_n = \int_0^1 (1-t^2)^n\,\mathrm{d}t \text{ et } J_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n}$$

puis établir

$$I_n \leqslant \frac{I}{\sqrt{n}} \leqslant J_n$$

c) On pose

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x\,\mathrm{d}x$$

Etablir

$$I_n = W_{2n+1} \text{ et } J_{n+1} = W_{2n}$$

d) Trouver une relation de récurrence entre W_n et W_{n+2}.
En déduire la constance de la suite de terme général

$$u_n = (n+1)W_nW_{n+1}$$

e) Donner un équivalent de W_n et en déduire la valeur de I.

Exercice 40 [00525] [Correction]
Justifier l'existence et calculer

$$I = \int_0^{+\infty} t\,[1/t]\,\mathrm{d}t$$

Exercice 41 [03630] [Correction]
Soit $f :]0,1] \to \mathbb{R}$ continue, décroissante et positive. On pose pour $n \in \mathbb{N}^\star$

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$$

Montrer que f est intégrable sur $]0,1]$ si, et seulement si, la suite (S_n) est convergente et que si tel est le cas

$$\int_{]0,1]} f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} S_n$$

Calcul d'intégrales comportant un paramètre

Exercice 42 [00683] [Correction]
Existence et valeur pour $a > 0$ de

$$I(a) = \int_0^{+\infty} \sin(t)\mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 43 [00684] [Correction]
Soit $a > 0$. En procédant au changement de variable $u = a/t$, calculer

$$I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{a^2+t^2}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 44 [02826] [Correction]
Calculer
$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2 + a^2} \, \mathrm{d}t$$
où $a > 0$.

Exercice 45 [00685] [Correction]
Pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{R}$, l'intégrale
$$I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)(1+t^a)}$$
est-elle définie ?
En procédant au changement de variable $u = 1/t$, montrer que $I(a) = \pi/4$.

Exercice 46 [03628] [Correction]
Pour quelles valeurs de a et b l'intégrale suivante est-elle définie ?
$$\int_0^{+\infty} \left(\sqrt{t} + a\sqrt{t+1} + b\sqrt{t+2}\right) \mathrm{d}t$$
La calculer lorsque c'est le cas.

Exercice 47 [00681] [Correction]
Pour $a > 0$, calculer
$$I(a) = \int_0^{+\infty} (t - \lfloor t \rfloor)\mathrm{e}^{-at} \, \mathrm{d}t$$

Exercice 48 [00686] [Correction]
Soit f une fonction continue et croissante sur $\mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$.
a) Pour $a > 0$, montrer que l'intégrale
$$\int_0^{+\infty} f(x+a) - f(x) \, \mathrm{d}x$$
est définie et la calculer.
b) Calculer
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \arctan(x+a) - \arctan(x) \, \mathrm{d}x$$

Exercice 49 [02827] [Correction]
Trouver une expression simple de
$$\int_0^{\pi} \frac{\sin^2 t}{(1 - 2x\cos t + x^2)(1 - 2y\cos t + y^2)} \, \mathrm{d}t$$
où $x, y \in \left]-1, 1\right[$.

Exercice 50 [02825] [Correction]
Existence et calcul éventuel de
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + (t + ib)^2} \, \mathrm{d}t$$

Exercice 51 [03884] [Correction]
Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, étudier l'existence et déterminer l'éventuelle valeur de
$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + \alpha x + 1}$$

Exercice 52 [00674] [Correction]
Soient $p, q \in \mathbb{R}$ tel que $p^2 - 4q < 0$. Justifier et calculer
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2 + pt + q}$$

Exercice 53 [03222] [Correction]
Pour $a, b > 0$, calculer
$$I(a,b) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t^2 + a^2)(t^2 + b^2)}$$

Exercice 54 [02968] [Correction]
Soient P et Q dans $\mathbb{R}[X]$, où Q ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ et $\deg P \leqslant \deg Q - 2$.
Exprimer $\int_{\mathbb{R}} P/Q$ à l'aide des coefficients intervenant dans la décomposition en éléments simple de P/Q.

Exercice 55 [03916] [Correction]
a) Soit z un nombre complexe non réel.
Déterminer la limite quand $A \to +\infty$ de

$$\int_{-A}^{A} \frac{\mathrm{d}t}{t-z}$$

b) Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ tels que $F = P/Q$ soit définie et intégrable sur $\mathbb{R}$.
Pour a pôle de F, on note R_a le coefficient de $1/(X-a)$ dans la décomposition en éléments simples de F.
Calculer la somme des R_a pour a décrivant l'ensemble des pôles de F.
c) En déduire

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F = 2i\pi \sum_{a \in P^+} R_a$$

où P^+ désigne l'ensemble des pôles de F de partie imaginaire strictement positive.
d) Soient $m, n \in \mathbb{N}$ avec $n > m$. Calculer

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}\,\mathrm{d}x$$

Exercice 56 [03977] [Correction]
a) Montrer que

$$I(a) = \int_0^{+\infty} \exp\left(-\left(x^2 + \frac{a^2}{x^2}\right)\right)\mathrm{d}x$$

existe pour tout $a \in \mathbb{R}$.
b) Justifier que pour $a > 0$,

$$I(a) = \int_0^{\sqrt{a}} \exp\left(-\left(x^2 + \frac{a^2}{x^2}\right)\right)\left(1 + \frac{a}{x^2}\right)\mathrm{d}x$$

c) En déduire la valeur de $I(a)$ pour $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 57 [04060] [Correction]
Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue telle que l'intégrale suivante converge :

$$\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$$

On se donne deux réels $0 < a < b$
a) Etablir que pour tout $x > 0$

$$\int_x^{+\infty} \frac{f(at)-f(bt)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_{ax}^{bx} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$$

b) En déduire convergence et valeur de

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(at)-f(bt)}{t}\,\mathrm{d}t$$

Changement de variable

Exercice 58 [03177] [Correction]
Calculer

$$I = \int_0^1 \frac{1+t^2}{1+t^4}\,\mathrm{d}t$$

en procédant au changement de variable $t = \mathrm{e}^{-x}$.

Exercice 59 [02509] [Correction]
a) Calculer

$$\int_0^{+\infty} \frac{1+x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x$$

en effectuant notamment le changement de variable $x = \mathrm{e}^t$.
b) En déduire la valeur de

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}$$

Exercice 60 [00668] [Correction]
Existence et valeur de

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2}$$

On pourra exploiter le changement de variable $u = 1/t$.

Exercice 61 [00669] [Correction]
a) Etablir

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^3+1} = \int_0^{+\infty} \frac{x}{x^3+1}\mathrm{d}x$$

b) En déduire la valeur de I.

Exercice 62 [02824] [Correction]
Existence et calcul de
$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

Exercice 63 [02965] [Correction]
Calculer
$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1-x)}} \text{ et } \int_0^1 \sqrt{x(1-x)}\,\mathrm{d}x$$

Exercice 64 [02978] [Correction]
Soit $f : \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ intégrable. On pose
$$g : x \in \mathbb{R}^\star \mapsto f(x - 1/x)$$
Montrer que g est intégrable sur $\mathbb{R}^{-\star}$ et $\mathbb{R}^{+\star}$ et que
$$\int_{-\infty}^0 g(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Intégration par parties

Exercice 65 [00678] [Correction]
Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$,
$$I_n = \int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$$

Exercice 66 [00680] [Correction]
Calculer pour $n \in \mathbb{N}$,
$$I_n = \int_0^1 (x\ln x)^n\,\mathrm{d}x$$

Exercice 67 [00679] [Correction]
Existence et calcul pour $n \in \mathbb{N}$ de
$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^{n+1}}$$

Exercice 68 [02555] [Correction]
On considère
$$f : t \mapsto \frac{\ln t}{(1+t)^2}$$
a) Etudier l'intégrabilité de f sur $]0,1]$ et $[1,+\infty[$.
b) Calculer
$$\int_0^1 \frac{\ln t}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t \text{ et } \int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 69 [00671] [Correction]
Calculer
$$\int_0^1 \frac{\ln(1-x^2)}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

Exercice 70 [03794] [Correction]
Convergence et calcul de
$$\int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\,\mathrm{d}t$$

Exercice 71 [03629] [Correction]
Soit $f : [1,+\infty] \to \mathbb{R}$ continue et intégrable. Montrer que les fonctions u et v suivantes sont intégrables sur $[1,+\infty[$ et que leurs intégrales y sont égales :
$$u(x) = \frac{1}{x^2}\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t \text{ et } v(x) = \frac{f(x)}{x}$$

Exercice 72 [03443] [Correction]
Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et vérifiant $f(0) = 0$. Etablir
$$\forall x > 0, \int_0^x \left(\frac{f(t)}{t}\right)^2 \mathrm{d}t \leqslant 2\int_0^x \frac{f(t)f'(t)}{t}\,\mathrm{d}t$$
en justifiant l'existence des intégrales écrites.

Exercice 73 [00665] [Correction]
Soit $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[(1+x^2)u(x)^2 + u'(x)^2\right] \mathrm{d}x < +\infty$$

a) Déterminer les limites de $x \mapsto xu(x)^2$ en $\pm\infty$.
b) Etablir

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u'(x)^2 \,\mathrm{d}x \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 u(x)^2 \,\mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{4}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} u(x)^2 \,\mathrm{d}x\right)^2$$

Exercice 74 [03990] [Correction]
Existence et calcul de

$$I = \int_0^{+\infty} \ln\left(\frac{1+t^2}{t^2}\right) \mathrm{d}t$$

Suites d'intégrales

Exercice 75 [03584] [Correction]
On pose

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^n} \text{ pour } n \in \mathbb{N},\, n \geqslant 2$$

a) Déterminer une suite de fonctions (f_n) telle que

$$I_n = \int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t$$

b) Déterminer deux réels a et b tels que

$$I_n = a + \frac{b}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \text{ quand } n \to +\infty$$

Exercice 76 [00682] [Correction]
On pose

$$J_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^3)^{n+1}}$$

a) Calculer J_0.
b) Former une relation de récurrence engageant J_n et J_{n+1}.
c) Etablir qu'il existe $A > 0$ tel que

$$J_n \sim \frac{A}{\sqrt[3]{n}}$$

Exercice 77 [00157] [Correction]
Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose

$$u_n = \int_0^{+\infty} \frac{t-[t]}{t(t+n)}\,\mathrm{d}t$$

où $[t]$ représente la partie entière de t.
a) Justifier la bonne définition de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$.
b) Montrer que pour tout $A > 0$

$$\int_0^A \frac{t-[t]}{t(t+n)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\left(\int_0^n \frac{t-[t]}{t}\,\mathrm{d}t - \int_A^{A+n} \frac{t-[t]}{t}\,\mathrm{d}t\right)$$

En déduire une nouvelle expression intégrale de u_n.
c) On pose

$$v_n = nu_n$$

Montrer la convergence de la série de terme général

$$v_n - v_{n-1} - \frac{1}{2n}$$

d) En déduire un équivalent de u_n.

Exercice 78 [02446] [Correction]
a) Soit $f \in \mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R})$. Déterminer les limites des suites

$$\left(\int_a^b f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t\right) \text{ et } \left(\int_a^b f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t\right)$$

b) Calculer, pour $n \in \mathbb{N}^\star$,

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2nt)\cos t}{\sin t}\,\mathrm{d}t$$

(on procédera par récurrence)
c) En déduire

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$$

d) Etudier la limite puis un équivalent de

$$\left(\int_0^{\pi/2} \ln(2\sin(t/2))\cos(nt)\,\mathrm{d}t\right)$$

Intégrales seulement convergentes

Exercice 79 [02346] [Correction]
[Intégrale de Dirichlet]
Justifier la convergence de l'intégrale suivante

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$$

On peut montrer que celle-ci est égale à $\pi/2$ mais c'est une autre histoire...

Exercice 80 [02383] [Correction]
[Intégrale de Dirichlet]
Etablir

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

puis

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2\,\mathrm{d}t$$

On peut démontrer que cette valeur commune est $\pi/2$ mais c'est une autre histoire...

Exercice 81 [03178] [Correction]
Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux, décroissante et de limite nulle.
Montrer la convergence de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} f(t)\sin(t)\,\mathrm{d}t$$

Exercice 82 [03334] [Correction]
La fonction $x \mapsto \int_0^x \sin(\mathrm{e}^t)\,\mathrm{d}t$ admet-elle une limite en $+\infty$?

Exercice 83 [00694] [Correction]
[Intégrales de Fresnel]
Montrer la convergence des deux intégrales suivantes

$$\int_0^{+\infty} \cos(t^2)\,\mathrm{d}t \text{ et } \int_0^{+\infty} \sin(t^2)\,\mathrm{d}t$$

Exercice 84 [02421] [Correction]
Convergence de

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{it^2}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 85 [03414] [Correction]
Trouver un équivalent en $+\infty$ de

$$f(\lambda) = \int_0^1 \mathrm{e}^{i\lambda x^2}\,\mathrm{d}x$$

Exercice 86 [00691] [Correction]
Pour $x > 0$, on pose

$$f(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{it^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \cos(t^2)\,\mathrm{d}t + i\int_0^x \sin(t^2)\,\mathrm{d}t$$

a) Montrer

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^{ix^2}-1}{2ix} + \frac{1}{2i}\int_0^x \frac{\mathrm{e}^{it^2}-1}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

En déduire que f admet une limite notée λ en $+\infty$.
b) On pose $g(x) = \lambda - f(x)$. Montrer que pour $x > 0$

$$g(x) = \frac{1}{2i}\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{it^2}}{t^2}\,\mathrm{d}t - \frac{\mathrm{e}^{ix^2}}{2ix}$$

c) Montrer qu'au voisinage de $+\infty$

$$g(x) = -\frac{\mathrm{e}^{ix^2}}{2ix} + O\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

Exercice 87 [00695] [Correction]
Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ continue. On suppose que l'intégrale suivante converge :

$$\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Calculer

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^x t f(t)\,\mathrm{d}t$$

Exercice 88 [03631] [Correction]
Soit $f : [1,+\infty[\to \mathbb{R}$ continue. Montrer

$$\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge } \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t \text{ converge}$$

Exercice 89 [02378] [Correction]
Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ continue et $\alpha > 0$. Montrer

$$\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge } \Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{1+t^\alpha}\,\mathrm{d}t \text{ converge}$$

Exercice 90 [00696] [Correction]
Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ continue.
On suppose que pour $s_0 \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-s_0 t}\,\mathrm{d}t$ converge.
Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t$ converge pour tout $s > s_0$.

Exercice 91 [03900] [Correction]
Soit $f : [a,+\infty[\to \mathbb{R}$ avec f de classe $\mathcal{C}^1$, décroissante et de limite nulle en $+\infty$.
Soit $g : [a,+\infty[\to \mathbb{R}$ continue telle qu'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ vérifiant

$$\forall x \in [a,+\infty[\,, \left|\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant M$$

Montrer la convergence de l'intégrale suivante

$$\int_a^{+\infty} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

Etude d'intégrales dépendant d'un paramètre

Exercice 92 [00688] [Correction]
On pose pour

$$f(a) = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^a+1}$$

a) Pour quelles valeurs de a, l'intégrale définissant $f(a)$ existe-t-elle ?
b) Montrer que la fonction est décroissante et de limite nulle en $+\infty$.

Exercice 93 [00687] [Correction]
[Fonction Γ d'Euler]
Pour $x > 0$ on note

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

a) Montrer que cette dernière intégrale est bien définie pour tout $x > 0$.
b) Justifier

$$\forall x > 1, \Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1)$$

et calculer $\Gamma(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^\star$.

Exercice 94 [00689] [Correction]
a) Pour quelles valeurs de x, l'intégrale

$$f(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

est-elle définie ?
b) Etudier la monotonie de f.
c) Calculer

$$f(x) + f(x+1) \text{ pour } x > 0$$

d) Déterminer la limite de f en $+\infty$ ainsi qu'un équivalent.
e) Déterminer la limite de f en 0^+ ainsi qu'un équivalent.

Exercice 95 [00692] [Correction]
Soit $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ intégrable.
a) Soit $A > 0$. Montrer

$$\int_0^A \varphi(t)\cos(xt)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

b) Montrer

$$\int_0^{+\infty} \varphi(t)\cos(xt)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

Intégrales fonctions des bornes

Exercice 96 [00690] [Correction]
Pour $x > 0$, on pose
$$F(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$$
a) Montrer que $F(x)$ est bien définie pour tout $x > 0$.
b) Etablir que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+\star}$ et calculer $F'(x)$.
c) Montrer
$$\lim_{x\to+\infty} xF(x) = 0 \text{ et } \lim_{x\to 0+} xF(x) = 0$$
d) Sans exprimer $F(x)$, justifier l'existence et calculer
$$\int_0^{+\infty} F(x)\,\mathrm{d}x$$

Exercice 97 [02879] [Correction]
a) Donner la nature de l'intégrale
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$$
On pose pour tout réel x
$$f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$$
b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et exprimer sa dérivée.
c) Calculer
$$\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Exercice 98 [00281] [Correction]
Pour tout $x \in [1, +\infty[$, on pose
$$F(x) = \int_1^x \frac{t}{\sqrt{t^3-1}}\,\mathrm{d}t$$
a) Montrer que F est bien définie, continue sur $[1, +\infty[$ et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$. Exprimer $F'(x)$.
b) Etudier la dérivabilité de F en 1. Préciser la tangente au graphe de F en 1.
c) Etudier la limite de F en $+\infty$.
d) Justifier que F réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur un intervalle à préciser et que F^{-1} est dérivable sur $]0, +\infty[$ et solution de l'équation différentielle
$$yy' = \sqrt{y^3-1}$$
e) Etudier la dérivabilité de F^{-1} en 0.

Exercice 99 [02348] [Correction]
a) Justifier que
$$G(x,y) = \int_0^y \frac{t-[t]}{t(t+x)}\,\mathrm{d}t$$
où $[t]$ représente la partie entière de t, est définie sur $(\mathbb{R}^{+\star})^2$.
b) Montrer que $G(x, y)$ tend vers une limite $G(x)$ quand y tend vers $+\infty$.
c) Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, G(n,y) = \frac{1}{n}\left(\int_0^n \frac{t-[t]}{t}\,\mathrm{d}t - \int_y^{y+n} \frac{t-[t]}{t}\,\mathrm{d}t\right)$$
d) On note $H(n) = nG(n)$; montrer que la série de terme général
$$H(n) - H(n-1) - \frac{1}{2n}$$
converge et en déduire un équivalent de $G(n)$.

Intégration des relations de comparaison

Exercice 100 [03892] [Correction]
Déterminer un équivalent quand $x \to +\infty$ du terme
$$\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 101 [03893] [Correction]
Déterminer un équivalent quand $x \to +\infty$ du terme
$$\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 102 [03894] [Correction]
Déterminer un développement asymptotique à trois termes quand $x \to +\infty$ de l'expression

$$\int_1^x \frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 103 [04059] [Correction]
Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour $0 < a < b$, déterminer

$$\lim_{x\to 0^+} \int_{ax}^{bx} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 104 [04067] [Correction]
Déterminer un équivalent quand $x \to +\infty$ de

$$\int_{\mathrm{e}}^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$$

Exercice 105 [04068] [Correction]
a) Justifier

$$\int_1^x \frac{\ln(t+1)}{t}\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}(\ln x)^2$$

b) Etablir qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ telle que

$$\int_1^x \frac{\ln(t+1)}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + C + \varepsilon(x) \text{ avec } \varepsilon(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

c) Déterminer un équivalent de la fonction ε en $+\infty$

Exercice 106 [04075] [Correction]
Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}^{+\star}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et non intégrable. On suppose $f'(x) \underset{x\to+\infty}{=} o(f(x))$.
Montrer

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]
On notera f la fonction intégrée et I l'intervalle d'étude, à chaque fois f s'avère continue par morceaux sur I.
a) $I =]0,1[$, $f(t) \underset{t\to 1^-}{\sim} \frac{1}{1-t}$ donc f n'est pas intégrable au voisinage de 1 et puisque de signe constant, l'intégrale étudiée diverge.
b) $I =]0,+\infty[$, $\sqrt{t}f(t) \xrightarrow[t\to 0^+]{} 0$ et $t^2 f(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ donc f est intégrable et $\int_0^{+\infty} \ln t\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge.
c) $I =]0,+\infty[$, $\sqrt{t}f(t) \xrightarrow[t\to 0^+]{} 0$ et $t^{3/2}f(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ donc f est intégrable et $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$ converge.
d) $I =]0,+\infty[$, $f(t) \underset{t\to 0^+}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}}$ et $t^{4/3}f(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ donc f est intégrable et $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t)}{t^{3/2}}\,\mathrm{d}t$ converge.
e) $I =]-\infty,+\infty[$, $t^{3/2}f(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ et $|t|^{3/2}f(t) \xrightarrow[t\to-\infty]{} 0$ donc f est intégrable et $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln(1+t^2)\,\mathrm{d}t}{1+t^2}$ converge.
f) $I =]0,+\infty[$, $\sin\frac{1}{t^2} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$ et $\sin\frac{1}{t^2}$ est bornée au voisinage de 0 donc f est intégrable et $\int_0^{+\infty} \sin\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

Exercice 2 : [énoncé]
On notera f la fonction intégrée et I l'intervalle d'étude, à chaque fois f s'avère continue par morceaux sur I.
a) $I = [0,+\infty[$, $t^2 f(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ donc f est intégrable et $\int_0^{+\infty} \frac{t\,\mathrm{e}^{-\sqrt{t}}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.
b) $I =]0,1[$, $\sqrt{t}f(t) \xrightarrow[t\to 0+]{} 0$ et $\frac{\ln t}{\sqrt{(1-t)^3}} \underset{t=1-u}{=} \frac{\ln(1-u)}{u^{3/2}} \sim \frac{1}{\sqrt{u}}$ donc f est intégrable et $\int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{(1-t)^3}}\,\mathrm{d}t$ converge
c) $I =]0,+\infty[$, $\frac{1}{\mathrm{e}^t-1} \underset{t\to 0^+}{\sim} \frac{1}{t}$ donc f n'est pas intégrable au voisinage de 0. Puisque de plus cette fonction est positive, on peut affirmer que l'intégrale diverge.
d) $I =]0,+\infty[$, $f(t) \xrightarrow[t\to 0+]{} 0$ et $t^2 f(t) = \mathrm{e}^{2\ln t-(\ln t)^2} = \mathrm{e}^{\ln t(2-\ln t)} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ donc f est intégrable et $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(\ln t)^2}\mathrm{d}t$ converge.
e) $I = [0,+\infty[$, $t^2 f(t) = \mathrm{e}^{2\ln t - t\arctan t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ donc f est intégrable et $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t\arctan t}\,\mathrm{d}t$ converge.
f) $I = [0,+\infty[$.
Quand $t \to +\infty$,

$$f(t) = t+2-t\sqrt{1+\frac{4}{t}+\frac{1}{t^2}} = t+2-t(1+\frac{2}{t}+\frac{1}{2t^2}-\frac{2}{t^2}+O(1/t^3)) \sim \frac{3}{2t}$$

f n'est pas intégrable en $+\infty$. Puisque de plus cette fonction est positive, on peut affirmer que l'intégrale diverge.

Exercice 3 : [énoncé]
a) La fonction f est définie et continue par morceaux sur $]1,+\infty[$.
Quand $x \to 1^+$,

$$f(x) \sim \frac{\sqrt{(x-1)}}{(x-1)} = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

et quand $x \to +\infty$

$$f(x) \sim \frac{\sqrt{\ln x}}{x^{3/2}} = o\left(\frac{1}{x^{1,0001}}\right)$$

donc f est intégrable sur $]1,+\infty[$.
b) Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\int_2^3 \frac{\sqrt{\ln x}}{(x-1)\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \leqslant \left(\int_2^3 \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^2}\right)^{1/2} \left(\int_2^3 \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x\right)^{1/2}$$

En calculant les intégrales introduites

$$\int_2^3 \frac{\sqrt{\ln x}}{(x-1)\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \leqslant \left(1-\frac{1}{2}\right)^{1/2} \left(\frac{1}{2}\left[(\ln 3)^2-(\ln 2)^2\right]\right)^{1/2} \leqslant \frac{\ln 3}{2}$$

Exercice 4 : [énoncé]
La fonction $f : t \mapsto \ln(\operatorname{th} t)$ est définie et continue par morceaux sur $]0,+\infty[$.
Quand $t \to 0^+$, $\operatorname{th} t \sim t \to 0 \neq 1$ donc $\ln(\operatorname{th} t) \sim \ln t$ puis $\sqrt{t}\ln(\operatorname{th} t) \sim \sqrt{t}\ln t \to 0$.
Quand $t \to +\infty$, $\operatorname{th} t = 1 - \frac{2}{\mathrm{e}^{2t}+1}$ donc $\ln(\operatorname{th} t) \sim -2\mathrm{e}^{-2t}$ puis $t^2\ln(\operatorname{th} t) \to 0$.
On en déduit que f est intégrable sur $]0,+\infty[$.

Exercice 5 : [énoncé]
On a

$$\int_0^{n\pi} |\sin t|\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin t|\,\mathrm{d}t = n\int_0^{\pi} \sin(t)\,\mathrm{d}t = 2n \to +\infty$$

et donc $t \mapsto \sin t$ n'est pas intégrable sur $[0, +\infty[$.
La fonction $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ est prolongeable par continuité en 0 et c'est ce prolongement qu'on considère pour étudier son intégrabilité sur $[0, +\infty[$.

$$\int_0^{n\pi} \frac{|\sin t|}{t}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin t|}{t}\,\mathrm{d}t$$

Or pour $k > 1$,

$$\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin t|}{t}\,\mathrm{d}t \geqslant \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin t|}{k\pi}\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{2}{k\pi}$$

donc

$$\int_0^{n\pi} \frac{|\sin t|}{t}\mathrm{d}t \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k\pi} = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \to +\infty$$

Exercice 6 : [énoncé]
La fonction f est définie et continue sur $]0, 1]$.
Pour $x \in]0, 1]$, on peut écrire

$$f(x) = \int_1^x \frac{\mathrm{e}^t - 1}{t}\,\mathrm{d}t + \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t} = \int_1^x \frac{\mathrm{e}^t - 1}{t}\,\mathrm{d}t + \ln x$$

D'une part, la fonction $t \mapsto \frac{\mathrm{e}^t - 1}{t}$ se prolonge par continuité en 0, elle est donc intégrable sur $]0, 1]$ et par suite la fonction

$$x \mapsto \int_1^x \frac{\mathrm{e}^t - 1}{t}\,\mathrm{d}t$$

est intégrable sur $]0, 1]$ car converge quand $x \to 0^+$.
D'autre part, il est bien connu que la fonction $x \mapsto \ln x$ est intégrable sur $]0, 1]$.
On en déduit que f est intégrable sur $]0, 1]$.

Exercice 7 : [énoncé]
Pour $a = x^\alpha$ avec $\alpha > 0$ on obtient

$$0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{x^{2-\alpha}} + \frac{1}{x^{2\alpha}}$$

En prenant $\alpha = 2/3$,

$$0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{2}{x^{4/3}}$$

et donc, par comparaison de fonctions positives, f est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Exercice 8 : [énoncé]
Puisque $|g| \leqslant |f|$, l'intégrabilité de f entraîne celle de g.
Inversement, supposons g intégrable.
On a

$$\int_0^{n\pi} |f(t)|\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(t)\,\mathrm{d}t$$

avec par décroissance de f

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \pi f(k\pi)$$

Parallèlement

$$\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |f(t)|\,|\sin(t)|\,\mathrm{d}t \geqslant f(k\pi)\int_0^{\pi} \sin(t)\,\mathrm{d}t = 2f(k\pi)$$

donc

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{\pi}{2}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} f(t)\,|\sin(t)|\,\mathrm{d}t$$

Ainsi

$$\int_0^{n\pi} |f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\pi} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{(n-1)\pi} f(t)\,|\sin(t)|\,\mathrm{d}t$$

et donc

$$\int_0^{n\pi} |f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\pi} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{+\infty} |g(t)|\,\mathrm{d}t$$

On peut alors affirmer que les intégrales de $|f|$ sur les segments inclus dans $[0, +\infty[$ sont majorées ce qui signifie que la fonction f est intégrable sur $[0, +\infty[$.

Exercice 9 : [énoncé]
Soit $q \in]\ell, 1[$. Il existe $A \in \mathbb{R}^+$ tel que

$$\forall x \geqslant A, \frac{f(x+1)}{f(x)} \leqslant q$$

et donc

$$\forall x \geqslant A, f(x+1) \leqslant qf(x)$$

On a alors

$$\int_A^{A+n} f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1}\int_A^{A+1} f(t+k)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\int_A^{A+1} q^k f(t)\,\mathrm{d}t = \int_A^{A+1} f(t)\sum_{k=0}^{n-1} q^k\,\mathrm{d}t$$

et donc

$$\int_A^{A+n} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{1-q}\int_A^{A+1} f(t)\,\mathrm{d}t = M$$

On en déduit que les intégrales sur $[A, A+n]$ de la fonction positive f sont majorées et donc f est intégrable sur $[A, A+\infty[$ puis sur $[0, +\infty[$.
L'intégrale étudiée est donc convergente.

Exercice 10 : [énoncé]
f est évidement dérivable sur $]0,1]$ avec

$$f'(x) = 2x\cos\left(\frac{1}{x^2}\right) + \frac{2}{x}\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

et puisque

$$\frac{f(x)-f(0)}{x} = x\cos\left(\frac{1}{x^2}\right) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$$

f est aussi dérivable en 0 avec $f'(0)=0$.
La fonction $x \mapsto x\cos\left(1/x^2\right)$ est intégrable sur $]0,1]$ car bornée.
En revanche, la fonction $g : x \mapsto \sin(1/x^2)/x$ n'est pas intégrable sur $]0,1]$. En effet, par le changement de variable $\mathcal{C}^1$ bijectif $t = 1/x^2$, l' intégrabilité de g sur $]0,1]$ équivaut à l'intégrabilité sur $[1,+\infty[$ de
$t \mapsto \sin(t)/t$ et cette dernière est connue comme étant fausse.
On en déduit que f' n'est pas intégrable sur $]0,1]$.

Exercice 11 : [énoncé]
a) Soit F une primitive de la fonction continue f. On a

$$g(x) = \frac{1}{x}\left(F(x)-F(0)\right) \xrightarrow[x\to 0^+]{} F'(0) = f(0)$$

Ainsi on peut prolonger g par continuité en 0 en posant $g(0) = f(0)$.
b) Soit F une primitive de f (il en existe car f est continue).
On a

$$g(x) = \frac{1}{x}\left(F(x)-F(0)\right)$$

On en déduit que g est dérivable sur $\mathbb{R}^{+\star}$ et

$$g'(x) = -\frac{1}{x^2}\left(F(x)-F(0)\right) + \frac{f(x)}{x} = \frac{f(x)-g(x)}{x}$$

c) Par intégration par parties

$$\int_a^b g^2(t)\,\mathrm{d}t = \left[tg^2(t)\right]_a^b - 2\int_a^b tg'(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

donc

$$\int_a^b g^2(t)\,\mathrm{d}t = \left[tg^2(t)\right]_a^b - 2\int_a^b \left(f(t)-g(t)\right)g(t)\,\mathrm{d}t$$

puis la relation proposée.
On en déduit par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\int_a^b g^2(t)\,\mathrm{d}t \leqslant 2\sqrt{\int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t}\sqrt{\int_a^b g^2(t)\,\mathrm{d}t} + ag^2(a)$$

puis

$$\int_a^b g^2(t)\,\mathrm{d}t - 2\sqrt{\int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t}\sqrt{\int_a^b g^2(t)\,\mathrm{d}t} \leqslant ag^2(a)$$

en ajoutant un même terme de part et d'autre

$$\left(\sqrt{\int_a^b g^2(t)\,\mathrm{d}t} - \sqrt{\int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t}\right)^2 \leqslant ag^2(a) + \int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t$$

puis par la croissance de la fonction racine carrée

$$\sqrt{\int_a^b g^2(t)\,\mathrm{d}t} - \sqrt{\int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t} \leqslant \left|\sqrt{\int_a^b g^2(t)\,\mathrm{d}t} - \sqrt{\int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t}\right| \leqslant \sqrt{ag^2(a) + \int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t}$$

et enfin

$$\sqrt{\int_a^b g^2(t)\,\mathrm{d}t} \leqslant \sqrt{\int_0^b f^2(t)\,\mathrm{d}t} + \sqrt{ag^2(a) + \int_0^b f^2(t)\,\mathrm{d}t} \leqslant \sqrt{\int_0^{+\infty} f^2(t)\,\mathrm{d}t} + \sqrt{ag^2(a) + \int_0^{+}$$

d) En faisant tendre a vers 0, on obtient

$$\sqrt{\int_0^b g^2(t)\,\mathrm{d}t} \leqslant 2\sqrt{\int_0^{+\infty} f^2(t)\,\mathrm{d}t}$$

et on en déduit que la fonction g^2 est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ car les intégrales de g^2 sur les segments inclus dans $\mathbb{R}^+$ sont majorées.

Exercice 12 : [énoncé]
a) Introduisons F la primitive de f s'annulant en 0. Quand $x \to 0^+$

$$g(x) = \frac{F(x)}{x} = \frac{F(x) - F(0)}{x} \to F'(0) = f(0)$$

La fonction g est donc prolongeable par continuité en 0.
Par intégration par parties

$$\int_\varepsilon^A g^2(x)\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{x}F^2(x)\right]_\varepsilon^A + 2\int_\varepsilon^A g(x)f(x)\,\mathrm{d}x$$

Quand $\varepsilon \to 0$,

$$\frac{F^2(\varepsilon)}{\varepsilon} = \frac{F(\varepsilon)}{\varepsilon} \times F(\varepsilon) \to 0$$

et donc

$$\int_0^A g^2(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{F^2(A)}{A} + 2\int_0^A g(x)f(x)\,\mathrm{d}x$$

Par suite

$$\int_0^A g^2(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 2\int_0^A g(x)f(x)\,\mathrm{d}x$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\left(\int_0^A g^2(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant 4\left(\int_0^A g^2(x)\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^A f^2(x)\,\mathrm{d}x\right)$$

et que le premier membre soit nul ou non

$$\left(\int_0^A g^2(x)\,\mathrm{d}x\right) \leqslant 4\left(\int_0^A f^2(x)\,\mathrm{d}x\right) \leqslant 4\left(\int_0^{+\infty} f^2(x)\,\mathrm{d}x\right)$$

On en déduit que g^2 est intégrable et l'inégalité proposée.
b) Puisque

$$|fg| \leqslant (f^2 + g^2)/2$$

la fonction fg est intégrable et en vertu de l'intégration par parties précédente,

$$\frac{F^2(x)}{x} = 2\int_0^x g(t)f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^x g^2(t)\,\mathrm{d}t$$

Il suffit alors d'établir

$$\frac{F^2(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

pour conclure.
On peut déjà affirmer que $F^2(x)/x$ admet une limite finie ℓ en $+\infty$ car les deux intégrales partielles de l'expression précédente convergent. Si cette limite n'est pas nulle alors

$$g^2(x) = \frac{F^2(x)}{x} \times \frac{1}{x} \sim \frac{\ell}{x}$$

et donc g^2 n'est pas intégrable.
On peut donc conclure que la limite ℓ est nulle.

Exercice 13 : [énoncé]
a) Par intégration par parties

$$\int_0^x f'(t)^2\,\mathrm{d}t = f'(x)f(x) - f'(0)f(0) - \int_0^x f(t)f''(t)\,\mathrm{d}t$$

Puisque f et f'' sont de carrés intégrables, la fonction ff'' est intégrable.
Puisque f'^2 est positive, l'intégrale partielle

$$\int_0^x f'(t)^2\,\mathrm{d}t$$

converge ou tend vers $+\infty$ quand $x \to +\infty$.
Dans les deux cas

$$f'(x)f(x) = f'(0)f(0) + \int_0^x f'(t)^2\,\mathrm{d}t + \int_0^x f(t)f''(t)\,\mathrm{d}t$$

admet une limite quand $x \to +\infty$.
Or

$$\int_0^x f'(t)f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(f(x)^2 - f(0)^2\right)$$

donc si $f'(x)f(x)$ ne tend par vers 0 quand $x \to +\infty$, l'intégrale précédente diverge et donc

$$\frac{1}{2}f(x)^2 \to +\infty$$

ce qui est incompatible avec l'intégrabilité de f^2 sur $\mathbb{R}$.
Ainsi

$$f'(x)f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

et on en déduit que f' est de carré intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et

$$\int_0^{+\infty} f'(t)^2\,\mathrm{d}t = f'(0)f(0) - \int_0^{+\infty} f(t)f''(t)\,\mathrm{d}t$$

L'étude sur $\mathbb{R}^-$ est identique avec

$$\int_{-\infty}^{0} f'(t)^2\,\mathrm{d}t = -f'(0)f(0) + \int_{-\infty}^{0} f(t)f''(t)\,\mathrm{d}t$$

b) Par ce qui précède

$$\int_{\mathbb{R}} f'^2 = -\int_{\mathbb{R}} ff''$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\left(\int_{\mathbb{R}} f'^2\right) \leqslant \left(\int_{\mathbb{R}} f^2\right)\left(\int_{\mathbb{R}} f''^2\right)$$

Exercice 14 : [énoncé]
a)

$$\frac{1}{t^a(t-1)^b} \underset{t\to 1^+}{\sim} \frac{1}{(t-1)^b}$$

et

$$\frac{1}{t^a(t-1)^b} \underset{t\to +\infty}{\sim} \frac{1}{t^{a+b}}$$

Donc $t \mapsto \frac{1}{t^a(t-1)^b}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ si, et seulement si, $b<1$ et $a+b>1$.
b)

$$\frac{t^a}{1+t^b} \underset{t\to 0^+}{\sim} \begin{cases} t^a \text{ si } b>0 \\ t^a/2 \text{ si } b=0 \\ t^{a-b} \text{ si } b<0 \end{cases}$$

et

$$\frac{t^a}{1+t^b} \underset{t\to +\infty}{\sim} \begin{cases} t^{a-b} & \text{si } b>0 \\ t^a/2 & \text{si } b=0 \\ t^a & \text{si } b<0 \end{cases}$$

Donc $t \mapsto \frac{t^a}{1+t^b}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ si, et seulement si :
dans le cas $b>0$: $a>-1$ et $a-b<-1$.
dans le cas $b=0$: jamais
dans le cas $b<0$: $a-b>-1$ et $a<-1$.
c)

$$\frac{t^a\mathrm{e}^{-t}}{1+t^b} \underset{t\to 0^+}{\sim} \frac{t^a}{1+t^b} \underset{t\to 0^+}{\sim} \begin{cases} t^a & \text{si } b>0 \\ t^a/2 & \text{si } b=0 \\ t^{a-b} & \text{si } b<0 \end{cases}$$

et

$$t^2\frac{t^a\mathrm{e}^{-t}}{1+t^b} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$$

Donc $t \mapsto \frac{t^a\mathrm{e}^{-t}}{1+t^b}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ si, et seulement si, $(a>-1$ et $b\geqslant 0)$ ou $(a-b>-1$ et $b<0)$.

Exercice 15 : [énoncé]
Posons $f(t) = 1/(t^\alpha(\ln t)^\beta)$ continue positive sur $[\mathrm{e},+\infty[$.
a) Si $\alpha>1$ alors en introduisant $\gamma \in\,]1,\alpha[$ on a $t^\gamma f(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ donc f est intégrable et $\int_{\mathrm{e}}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.
b) Si $\alpha=1$ alors

$$\int_{\mathrm{e}}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{t(\ln t)^\beta} = \int_1^{\ln x} \frac{\mathrm{d}u}{u^\beta}$$

donc $\int_{\mathrm{e}}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si, et seulement si, $\beta>1$.
c) Si $\alpha<1$ alors $\frac{t}{t^\alpha(\ln t)^\beta} = \frac{t^{1-\alpha}}{(\ln t)^\beta} \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$ donc il existe $A\geqslant \mathrm{e}$ vérifiant $\forall t\geqslant A$, $\frac{1}{t^\alpha(\ln t)^\beta} \geqslant \frac{1}{t}$. On a alors

$$\int_A^x \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha(\ln t)^\beta} \geqslant \int_A^x \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln x - \ln A \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$$

et donc $\int_{\mathrm{e}}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.

Exercice 16 : [énoncé]
$f : t \mapsto \frac{t-\sin t}{t^\alpha}$ est définie et continue sur $]0,+\infty[$.
Quand $t\to 0$, $f(t) \sim \frac{1}{6t^{\alpha-3}}$ donc $\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$ est définie si, et seulement si, $\alpha-3<1$ i.e. $\alpha<4$.
Quand $t\to+\infty$, $f(t)\sim \frac{1}{t^{\alpha-1}}$ donc $\int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ est définie si, et seulement si, $\alpha-1>1$ i.e. $\alpha>2$.
Finalement $\int_0^{+\infty} \frac{t-\sin t}{t^\alpha}\mathrm{d}t$ est définie si, et seulement si, $\alpha\in\,]2,4[$.

Exercice 17 : [énoncé]
a) L'intégrale étudiée est bien définie pour $a>-1$ en tant qu'intégrale d'une fonction définie et continue sur le segment $[0,\pi/2]$. Par le changement de variable proposé, qui est $\mathcal{C}^1$ strictement monotone, on obtient

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{1+a\sin^2(t)} = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+(1+a)x^2}$$

En considérant $u = x\sqrt{1+a}$, on détermine une primitive de la fonction intégrée

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+(1+a)x^2} = \left[\frac{1}{\sqrt{1+a}}\arctan\left(\sqrt{1+a}x\right)\right]_0^{+\infty}$$

Finalement
$$\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{1+a\sin^2(t)} = \frac{\pi}{2\sqrt{1+a}}$$
b) Par la symétrie du graphe de fonction sinus en $\pi/2$, on peut directement affirmer
$$\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}t}{1+(n\pi)^\alpha\sin^2(t)} = 2\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{1+(n\pi)^\alpha\sin^2(t)}$$
Le calcul qui précède donne alors
$$\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}t}{1+(n\pi)^\alpha\sin^2(t)} = \frac{\pi}{\sqrt{1+(n\pi)^\alpha}} \sim \frac{\pi^{1-\alpha/2}}{n^{\alpha/2}}$$
Par équivalence de séries à termes positifs, la série étudiée converge si, et seulement si, $\alpha > 2$.
c) Pour $t \in [n\pi, (n+1)\pi]$, on a
$$1+(n\pi)^\alpha\sin^2(t) \leqslant 1+t^\alpha\sin^2(t) \leqslant 1+((n+1)\pi)^\alpha\sin^2(t)$$
Puis en passant à l'inverse et en intégrant, on obtient l'encadrement
$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\mathrm{d}t}{1+((n+1)\pi)^\alpha\sin^2(t)} \leqslant \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha\sin^2(t)} \leqslant \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\mathrm{d}t}{1+(n\pi)^\alpha\sin^2(t)}$$
Par comparaison de séries à termes positifs, la convergence de la série étudiée équivaut à la convergence de la série précédente. La condition attendue est donc encore $\alpha > 2$.
d) Les sommes partielles de la série étudiée ci-dessus correspondent aux intégrales suivantes
$$\int_0^{n\pi} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha\sin^2(t)}$$
La fonction intégrée étant positive et la suite de segments $[0, n\pi]$ étant croissante et de réunion $\mathbb{R}^+$, la convergence de l'intégrale proposée entraîne la convergence de la série et inversement. On conclut que l'intégrale étudiée converge si, et seulement si, $\alpha > 2$.

Exercice 18 : [énoncé]
Puisque f est de classe $\mathcal{C}^1$ et que f' est intégrable sur $[0, +\infty[$, on a
$$f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} f'(t)\,\mathrm{d}t$$
Ainsi la fonction f converge en $+\infty$.
De plus f est intégrable sur $[0, +\infty[$, la limite de f en $+\infty$ ne peut alors être autre que 0.

Exercice 19 : [énoncé]
Par l'inégalité
$$ab \leqslant \frac{1}{2}(a^2+b^2)$$
on peut affirmer
$$|ff'| \leqslant \frac{1}{2}\left(f^2+f'^2\right)$$
et assurer que la fonction ff' est intégrable sur $[0, +\infty[$. Or
$$\int_0^x ff'(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(f(x)\right)^2$$
donc f^2 converge quand $x \to +\infty$. Puisque la fonction f^2 est intégrable sur $[0, +\infty[$ et converge en $+\infty$, sa limite est nécessairement nulle et donc $f \xrightarrow[+\infty]{} 0$.

Exercice 20 : [énoncé]
Par la relation de Chasles
$$\int_x^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$
donc, quand $x \to +\infty$,
$$\int_x^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t \to \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

Exercice 21 : [énoncé]
a) Pour $x \geqslant 1$, la décroissance de f donne
$$\int_x^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(x) \leqslant \int_{x-1}^x f(t)\,\mathrm{d}t$$
Or
$$\int_x^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$
et puisque l'intégrale de f sur $[0, +\infty[$ converge
$$\int_x^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

Aussi

$$\int_{x-1}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

et donc par encadrement

$$f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

b) La fonction f est positive car décroît vers 0 en $+\infty$ et

$$0 \leqslant \frac{x}{2}f(x) \leqslant \int_{x/2}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

ce qui permet d'affirmer

$$xf(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

c) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\forall x \in [0,2[\,, f(x) = 0$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}\,, \forall t \in [0,1[\,,\ f(t+n) = \begin{cases} n^2 t & \text{si } t \in \left[0, 1/n^2\right] \\ n^2(2/n^2 - t) & \text{si } t \in \left[1/n^2, 2/n^2\right] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

f est continue sur $\mathbb{R}^+$ et

$$\int_0^n f(t)\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1}\int_k^{k+1} f(t)\mathrm{d}t = \sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{k^2} \leqslant \sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{n-1} \leqslant 1$$

Puisque la suite $([0,n])_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de segments de réunion $\mathbb{R}^+$ et que f est positive on peut affirmer que f est intégrable sur $[0,+\infty[$.

Exercice 22 : [énoncé]
Par la décroissance de f, on a

$$\int_x^{2x} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant xf(x) \leqslant 2\int_{x/2}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Or par convergence de l'intégrale

$$\int_x^{2x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2x} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

et de même

$$\int_{x/2}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

On en déduit par encadrement

$$xf(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

Exercice 23 : [énoncé]
Montrons pour commencer

$$\forall \varepsilon > 0, \forall A \in \mathbb{R}^+, \exists x \geqslant A, |xf(x)| \leqslant \varepsilon$$

Par l'absurde, supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$ et $A \in \mathbb{R}^+$ vérifiant

$$\forall x \geqslant A, |xf(x)| \geqslant \varepsilon$$

on a alors au voisinage de $+\infty$

$$|f(x)| \geqslant \frac{\varepsilon}{x}$$

ce qui est contradictoire avec l'intégrabilité de f.
Sachant

$$\forall \varepsilon > 0, \forall A \in \mathbb{R}^+, \exists x \geqslant A, |xf(x)| \leqslant \varepsilon$$

on peut construire une suite (x_n) solution en prenant $\varepsilon = 1/(n+1) > 0$, $A = n$ et en choisissant x_n vérifiant

$$x_n \geqslant n \text{ et } |x_n f(x_n)| \leqslant 1/(n+1)$$

Exercice 24 : [énoncé]
On peut prendre f nulle sur $[0,1]$, puis pour chaque intervalle $[n,n+1]$ avec $n \in \mathbb{N}^\star$, la fonction f affine par morceaux définie par les nœuds $f(n) = 0$, $f(n+\frac{1}{n^3}) = n$, $f(n+\frac{2}{n^3}) = 0$ et $f(n+1) = 0$ ce qui définit une fonction f positive continue vérifiant $\int_n^{n+1} f = \frac{1}{n^2}$ et donc intégrable sur $\mathbb{R}^+$ bien que non bornée.

Exercice 25 : [énoncé]
a) On a

$$f'(x) = f'(0) + \int_0^x f''(t)\,\mathrm{d}t$$

donc $f'(x)$ admet une limite finie ℓ quand $x \to +\infty$.

Si $\ell > 0$ alors pour x assez grand $f'(x) \geqslant \ell/2$ puis $f(x) \geqslant \ell x/2 + m$ ce qui empêche la convergence de $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.
Si $\ell < 0$ on obtient aussi une absurdité. Il reste donc $\ell = 0$.
b) Puisque la fonction f' est continue et converge en $+\infty$, cette fonction est bornée et donc $t \mapsto f(t)f'(t)$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

Exercice 26 : [énoncé]
Soit $\varepsilon > 0$ et $A \in [0, +\infty[$ tel que

$$\int_A^{+\infty} f^2(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \varepsilon^2$$

On a

$$\frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^A f(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{\sqrt{x}}\int_A^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

D'une part, par l'inégalité de Cauchy Schwarz

$$\left|\int_A^x f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \sqrt{\int_A^x 1\,\mathrm{d}t}\sqrt{\int_A^x f^2(t)\,\mathrm{d}t} \leqslant \varepsilon\sqrt{x}$$

D'autre part, pour x assez grand

$$\frac{1}{\sqrt{x}}\left|\int_0^A f(t)\,\mathrm{d}t\right| = \frac{C^{te}}{\sqrt{x}} \leqslant \varepsilon$$

Ainsi, pour x assez grand

$$\left|\frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant 2\varepsilon$$

Exercice 27 : [énoncé]
On notera f la fonction intégrée et I l'intervalle d'étude, à chaque fois f s'avère continue par morceaux sur I.
a) $I = [0, +\infty[$, $f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$, donc f est intégrable et l'intégrale étudiée converge.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t+1)(t+2)} = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t+1} - \frac{1}{t+2}\mathrm{d}t = \left[\ln\frac{t+1}{t+2}\right]_0^{+\infty} = \ln 2$$

b) $I = [0, +\infty[$, $t^2 f(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$, donc f est intégrable et l'intégrale étudiée converge.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(\mathrm{e}^t+1)(\mathrm{e}^{-t}+1)} \underset{u=\mathrm{e}^t}{=} \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{(u+1)^2} = \frac{1}{2}$$

c) $I =]0, +\infty[$, $\sqrt{t}f(t) \xrightarrow[t\to 0]{} 0$ et $f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$ donc f est intégrable et l'intégrale étudiée converge.

$$\int_\varepsilon^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t \underset{IPP}{=} \left[t\ln\left(1+1/t^2\right)\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2} = \pi$$

L'intégration par parties est justifiée par deux convergences.
d) $I = [0, +\infty[$, $t^2 f(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$, donc f est intégrable et l'intégrale étudiée converge.

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \underset{u=\sqrt{t}}{=} \int_0^{+\infty} 2u\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u \underset{IPP}{=} \left[-2u\mathrm{e}^{-u}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} 2\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u = 2$$

L'intégration par parties est justifiée par deux convergences.
e) $I =]0, +\infty[$, $\sqrt{t}f(t) \xrightarrow[t\to 0^+]{} 0$ et $t^{3/2}f(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ donc f est intégrable et l'intégrale étudiée converge.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t \underset{u=1/t}{=} \int_0^{+\infty} \frac{\ln 1/u}{u^2(1+1/u)^2}\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} \frac{-\ln u}{(u+1)^2}\mathrm{d}u$$

donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t = 0$$

Exercice 28 : [énoncé]
On notera f la fonction intégrée et I l'intervalle d'étude, à chaque fois f s'avère continue par morceaux sur I.
a) $I = [0, +\infty[$, $t^2 f(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$, donc f est intégrable et $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{\mathrm{e}^t+1}}$ converge.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{\mathrm{e}^t+1}} \underset{u=\sqrt{\mathrm{e}^t+1}}{=} \int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{2\,\mathrm{d}u}{u^2-1} = \left[\ln\frac{u-1}{u+1}\right]_{\sqrt{2}}^{+\infty} = \ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = 2\ln(1+\sqrt{2})$$

b) $I = [1, +\infty[$, $t^2 f(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$, donc f est intégrable et $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{sh}t}$ converge.

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{sh}t} = \int_1^{+\infty} \frac{2\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}} \underset{u=\mathrm{e}^t}{=} \int_{\mathrm{e}}^{+\infty} \frac{2\mathrm{d}u}{u^2-1} = \left[\ln\frac{u-1}{u+1}\right]_{\mathrm{e}}^{+\infty} = \ln\frac{\mathrm{e}+1}{\mathrm{e}-1}$$

c) $I =]0, +\infty[$, $f(t) \xrightarrow[t\to 0]{} 0$ et $t^2 f(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ donc f est intégrable et $\int_0^{+\infty} \frac{t\ln t}{(t^2+1)^2}\mathrm{d}t$ converge.

$$\int_0^{+\infty} \frac{t\ln t}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t \underset{u=1/t}{=} \int_0^{+\infty} \frac{\ln 1/u}{u^3(1+1/u^2)^2}\,\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} \frac{-u\ln u}{(u^2+1)^2}\,\mathrm{d}u$$

donc
$$\int_0^{+\infty}\frac{t\ln t}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t=0$$

d) $I=[1,+\infty[$, $t^2f(t)\xrightarrow[t\to+\infty]{}0$, donc f est intégrable et $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^2\sqrt{1+t^2}}$ converge.
$$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^2\sqrt{1+t^2}}\underset{t=\operatorname{sh}x}{=}\int_{\operatorname{argsh}1}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{sh}^2x}=\int_{\operatorname{argsh}1}^{+\infty}\frac{4\,\mathrm{d}x}{(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})^2}\underset{u=e^x}{=}\int_{1+\sqrt2}^{+\infty}\frac{4\,\mathrm{d}u}{u(u-1/u)^2}$$
donc
$$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^2\sqrt{1+t^2}}=\int_{1+\sqrt2}^{+\infty}\frac{4u\,\mathrm{d}u}{(u^2-1)^2}=\left[2\frac{1}{1-u^2}\right]_{1+\sqrt2}^{+\infty}=2\frac{1}{(\sqrt2+1)^2-1}=\sqrt2-1$$

e) $I=]0,1]$, $t^{2/3}f(t)\xrightarrow[t\to0+]{}0$ donc f est intégrable et $\int_0^1\frac{\ln t}{\sqrt t}\,\mathrm{d}t$ converge.
$$\int_0^1\frac{\ln t}{\sqrt t}\,\mathrm{d}t\underset{u=\sqrt t}{=}\int_0^1 4\ln u\,\mathrm{d}u=[4u\ln u-4u]_0^1=-4$$

Exercice 29 : [énoncé]

a) $f:t\mapsto\frac{\mathrm{e}^{-\sqrt t}}{\sqrt t}$ est définie et continue sur $]0,+\infty[$, $f(t)\underset{0}{\sim}\frac{1}{\sqrt t}$ et $t^2f(t)\xrightarrow[t\to+\infty]{}0$ donc f est intégrable et l'intégrale étudiée converge.
Via le changement de variable $u=\sqrt t$
$$I=2\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u=2$$

b) $f:x\mapsto\sin x\ln(\sin x)$ est définie et continue sur $]0,\pi/2]$ et $f(x)\xrightarrow[x\to0]{}0$ donc f est intégrable et l'intégrale étudiée converge.
Via le changement de variable $t=\cos x$
$$I=\frac12\int_0^1\ln(1-x^2)\,\mathrm{d}x=\frac12\int_0^1\ln(1-x)+\ln(1+x)\,\mathrm{d}x=\ln2-1$$

c) $f:t\mapsto\frac{\ln t}{\sqrt{1-t}}$ est définie et continue sur $]0,1[$, $\sqrt t f(t)\xrightarrow[t\to0]{}0$ et $f(t)\xrightarrow[t\to1]{}0$ donc f est intégrable et l'intégrale étudiée converge.
Via le changement de variable $u=\sqrt{1-t}$
$$I=-\int_1^0 2\ln(1-u^2)\,\mathrm{d}u=\int_0^1 2\ln(1-u^2)\,\mathrm{d}u$$
Or $\int_0^1\ln(1-u^2)\,\mathrm{d}u=\int_0^1\ln(1-u)\,\mathrm{d}u+\int_0^1\ln(1+u)\,\mathrm{d}u=2\ln2-2$, donc
$$I=4\ln2-4$$

d) $f:x\mapsto\frac{1}{(x+1)\sqrt[3]{x}}$ est définie et continue sur $]0,+\infty[$, $f(x)\underset{x\to0^+}{\sim}\frac{1}{x^{1/3}}$ et $f(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{1}{x^{4/3}}$ donc f est intégrable et l'intégrale étudiée converge.
Via le changement de variable $t=\sqrt[3]{x}, x=t^3$, $\mathrm{d}x=3t^2\,\mathrm{d}t$.
$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt[3]{x}}=\int_0^{+\infty}\frac{3t^2\,\mathrm{d}t}{(t^3+1)t}=3\int_0^{+\infty}\frac{t\,\mathrm{d}t}{t^3+1}$$
puis
$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt[3]{x}}=\left[\ln\frac{t+1}{\sqrt{t^2-t+1}}+\sqrt3\arctan\frac{2t-1}{\sqrt3}\right]_0^{+\infty}=\frac{2\pi}{\sqrt3}$$

e) $f:x\mapsto\frac{\sqrt{1+x}-1}{x(1+x)}$ est définie et continue sur $]0,+\infty[$, $f(x)\xrightarrow[x\to0^+]{}\frac12$ et $f(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{1}{x^{3/2}}$ donc f est intégrable et l'intégrale étudiée converge.
Via le changement de variable $t=\sqrt{1+x}, x=t^2-1$, $\mathrm{d}x=2t\,\mathrm{d}t$.
$$\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x(1+x)}\,\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}\frac{t-1}{(t^2-1)t^2}2t\,\mathrm{d}t=\int_1^{+\infty}\frac{2\,\mathrm{d}t}{t(t+1)}=2\ln2$$

f) $f:x\mapsto\frac{(1+x)^{1/3}-1}{x(1+x)^{2/3}}$ est définie et continue sur $]0,+\infty[$, $f(x)\xrightarrow[x\to0^+]{}\frac13$ et $f(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{1}{x^{4/3}}$ donc f est intégrable et l'intégrale étudiée converge.
Via le changement de variable $t=(1+x)^{1/3}, x=t^3-1$, $\mathrm{d}x=3t^2\,\mathrm{d}t$.
$$\int_0^{+\infty}\frac{(1+x)^{1/3}-1}{x(1+x)^{2/3}}\,\mathrm{d}x=3\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^2+t+1}$$
or
$$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^2+t+1}=\left[\frac{2}{\sqrt3}\arctan\frac{2t+1}{\sqrt3}\right]_1^{+\infty}=\frac{\pi}{3\sqrt3}$$
donc
$$\int_0^{+\infty}\frac{(1+x)^{1/3}-1}{x(1+x)^{2/3}}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{\sqrt3}$$

g) Par 2π périodicité,
$$\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}x}{2+\cos x}=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{2+\cos x}$$

Sur $]-\pi,\pi[$, on peut réaliser le changement de variable $t=\tan x/2$.

$$\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}x}{2+\cos x}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2\,\mathrm{d}t}{(1+t^2)(2+\frac{1-t^2}{1+t^2})}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2\,\mathrm{d}t}{3+t^2}=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

h) Sur $[0,\pi/2[\,,]\pi/2,3\pi/2[$ ou $]3\pi/2,2\pi]$ on a

$$\int\frac{\sin^2 x}{3\cos^2 x+1}\,\mathrm{d}x\underset{t=\tan x}{=}\int\frac{t^2\,\mathrm{d}t}{(1+t^2)(4+t^2)}=-\frac{x}{3}+\frac{2}{3}\arctan\frac{\tan x}{2}+C^{te}$$

Par recollement, on détermine une primitive sur $[0,2\pi]$ et on conclut

$$\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2(x)}{3\cos^2(x)+1}\,\mathrm{d}x=\frac{2\pi}{3}$$

i) $f:x\mapsto\frac{x}{\sqrt{x-x^2}}$ est définie et continue sur $]0,1[$, $f(x)\xrightarrow[x\to0^+]{}0$ et $f(x)\underset{x\to1^-}{\sim}\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ donc f est intégrable et l'intégrale étudiée converge
On écrit

$$x-x^2=\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$$

On pose alors $x-\frac12=\frac12\sin t$ et on a $\sqrt{x-x^2}=\frac12\cos t$.
Par changement de variable

$$\int_0^1\frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x-x^2}}=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\sin t+1}{2\cos t}\cos t\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}$$

Exercice 30 : [énoncé]
a) $f:t\mapsto\frac{t}{1+t^4}$ est définie et continue sur $[0,+\infty[$, $f(t)\underset{t\to+\infty}{\sim}\frac{1}{t^3}$ donc f est intégrable et l'intégrale J converge.

$$\int_0^{+\infty}\frac{t\,\mathrm{d}t}{1+t^4}=\left[\frac12\arctan t^2\right]_0^{+\infty}=\frac{\pi}{4}$$

b) $\frac{1}{1+t^4}\underset{t\to+\infty}{\sim}\frac{1}{t^4}$ et $\frac{t^2}{1+t^4}\underset{t\to+\infty}{\sim}\frac{1}{t^2}$ donc les deux intégrales introduites convergent.
Le changement de variable $x=1/t$ transforme l'une en l'autre.
c) On a la factorisation

$$t^4+1=(t^2+1)^2-2t^2=(t^2+\sqrt2 t+1)(t^2-\sqrt2 t+1)$$

donc

$$I-\sqrt2 J+I=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^2+\sqrt2 t+1}=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{\left(t+\frac{1}{\sqrt2}\right)^2+\frac12}=\left[\sqrt2\arctan(\sqrt2 t+1)\right]_0^{+\infty}=\frac{\pi}{2\sqrt2}$$

puis

$$I=\frac12\left(\frac{\pi}{2\sqrt2}+\frac{\pi}{2\sqrt2}\right)=\frac{\pi}{2\sqrt2}$$

Exercice 31 : [énoncé]
La fonction intégrée est définie et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et est dominée par $1/t^3$ quand $|t|\to+\infty$, donc elle est intégrable et l'intégrale étudiée existe.
Par découpage et changement de variable

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)(1+it)}=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)(1+it)}+\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)(1-it)}$$

donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)(1+it)}=\int_0^{+\infty}\frac{2\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2}$$

Or

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2}=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)}-\int_0^{+\infty}\frac{t^2\,\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2}$$

Une intégration par parties justifiée par deux convergences donne

$$\int_0^{+\infty}\frac{t^2\,\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2}=\left[-\frac12\frac{t}{1+t^2}\right]_0^{+\infty}+\frac12\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$$

et donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)(1+it)}=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=\frac{\pi}{2}$$

Exercice 32 : [énoncé]
a) $f:]0,1[\to\mathbb{R}$ définie par $f(t)=\frac{t-1}{\ln t}$ est continue. $f(t)\xrightarrow[t\to0^+]{}0$ et $f(t)\xrightarrow[t\to1^-]{}1$ donc f est prolongeable par continuité à $[0,1]$.
b) Via le changement de variable $t=\mathrm{e}^{-x}$,

$$\int_0^1\frac{t-1}{\ln t}\,\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-2x}}{x}\,\mathrm{d}x$$

c) Par linéarité (avec existence des intégrales introduites)

$$I=\lim_{\varepsilon\to0}\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-2x}}{x}\,\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to0}\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x-\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-2x}}{x}\,\mathrm{d}x$$

Par le changement de variable $t = 2x$

$$\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-2x}}{x}\,\mathrm{d}x = \int_{2\varepsilon}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$$

puis par la relation de Chasles

$$I = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x$$

Puisque

$$\int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{\mathrm{e}^{-2\varepsilon}}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{\mathrm{e}^{-\varepsilon}}{x}\,\mathrm{d}x$$

on a

$$\mathrm{e}^{-2\varepsilon} \ln 2 \leqslant \int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant \mathrm{e}^{-\varepsilon} \ln 2$$

puis à la limite : $I = \ln 2$.

Exercice 33 : [énoncé]
a) $f : t \mapsto \frac{\sin^3 t}{t^2}$ est définie et continue par morceaux sur $]0, +\infty[$.
Quand $t \to 0$, $f(t) \to 0$ et quand $t \to +\infty$, $f(t) = O(1/t^2)$.
On en déduit que f est intégrable sur I ce qui assure l'existence de I.
b) On a $\sin 3t = 3 \sin t - 4 \sin^3 t$ donc

$$4I(x) = \int_{x}^{+\infty} \frac{3 \sin t - \sin(3t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

Par convergence des intégrales écrites, on a

$$4I(x) = 3 \int_{x}^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t - \int_{x}^{+\infty} \frac{\sin(3t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

Or

$$\int_{x}^{+\infty} \frac{\sin(3t)}{t^2}\,\mathrm{d}t \underset{u=3t}{=} 3 \int_{3x}^{+\infty} \frac{\sin u}{u^2}\,\mathrm{d}u$$

donc

$$I(x) = \frac{3}{4} \int_{x}^{3x} \frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

c) $I = \lim\limits_{x \to 0} I(x)$. Or $\sin t = t + t^2 \varepsilon(t)$ avec $\varepsilon \underset{0}{\to} 0$ donc

$$\int_{x}^{3x} \frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t = \ln 3 + \int_{x}^{3x} \varepsilon(t)\,\mathrm{d}t$$

Puisque $\int_x^{3x} \varepsilon(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x \to 0]{} 0$, on obtient

$$I = \frac{3}{4} \ln 3$$

Exercice 34 : [énoncé]
Puisque

$$\sqrt{t} \ln(\sin t) \xrightarrow[t \to 0]{} 0$$

l'intégrale I converge.
Par le changement de variable $t = \pi/2 - h$, I est transformée en J donc J converge et $I = J$.

$$I + J = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin t) + \ln(\cos t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \ln(\frac{1}{2} \sin 2t)\,\mathrm{d}t$$

puis

$$I + J = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin 2t) - \ln 2\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin 2t)\,\mathrm{d}t - \frac{\pi \ln 2}{2}$$

Cependant

$$2 \int_0^{\pi/2} \ln(\sin 2t)\,\mathrm{d}t \underset{u=2t}{=} \int_0^{\pi} \ln(\sin u)\,\mathrm{d}u = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin u)\,\mathrm{d}u + \int_{\pi/2}^{\pi} \ln(\sin u)\,\mathrm{d}u$$

et

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \ln(\sin u)\,\mathrm{d}u \underset{u=\pi/2+v}{=} \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(v + \pi/2))\,\mathrm{d}v = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos v)\,\mathrm{d}v$$

donc

$$2 \int_0^{\pi/2} \ln(\sin 2t)\,\mathrm{d}t = (I + J)$$

Par suite

$$I = J = -\frac{\pi \ln 2}{2}$$

Exercice 35 : [énoncé]
On a

$$\int_0^x f(t+1) - f(t)\,\mathrm{d}t = \int_x^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$$

Etudions la limite de $\int_x^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t$ quand $x \to +\infty$.

$$\left|\int_x^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t - \ell\right| \leqslant \int_x^{x+1} |f(t)-\ell|\,\mathrm{d}t$$

Pour $\varepsilon > 0$, il existe $A \in \mathbb{R}^+$, tel que pour $x \geqslant A$, $|f(x)-\ell| \leqslant \varepsilon$.
Pour tout $t \in [x, x+1]$, on a alors $|f(t)-\ell| \leqslant \varepsilon$ puis par intégration

$$\left|\int_x^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t - \ell\right| \leqslant \int_x^{x+1} |f(t)-\ell|\,\mathrm{d}t \leqslant \varepsilon$$

Ainsi

$$\int_x^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell$$

Finalement $\int_0^{+\infty} f(t+1)-f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $\ell - \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$.
Une étude semblable donne $\int_{-\infty}^0 f(t+1)-f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t - \ell'$.
Finalement $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t+1)-f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $\ell - \ell'$.

Exercice 36 : [énoncé]
Puisque l'intégrale $\int_0^{+\infty} f$ converge, il en est de même de

$$\int_0^{+\infty} f(a+x)\,\mathrm{d}x \text{ et } \int_0^{+\infty} f(b+x)\,\mathrm{d}x$$

avec

$$\int_0^{+\infty} f(a+x)\,\mathrm{d}x = \int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \text{ et } \int_0^{+\infty} f(b+x)\,\mathrm{d}x = \int_b^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

On en déduit la convergence de l'intégrale suivante et sa valeur

$$\int_0^{+\infty} (f(a+x)-f(b+x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

D'autre part, on a par découpage et pour tout $A \geqslant 0$

$$\int_{-A}^0 (f(a+x)-f(b+x))\,\mathrm{d}x = \int_{-A+a}^{-A+b} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Or

$$(b-a)\min_{[-A+a,-A+b]} f \leqslant \int_{-A+a}^{-A+b} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant (b-a)\max_{[-A+a,-A+b]} f$$

avec

$$\min_{[-A+a,-A+b]} f \xrightarrow[A\to+\infty]{} \ell \text{ et } \max_{[-A+a,-A+b]} f \xrightarrow[A\to+\infty]{} \ell$$

car f converge vers ℓ en $-\infty$.
On en déduit la convergence et la valeur de l'intégrale suivante

$$\int_{-\infty}^0 (f(a+x)-f(b+x))\,\mathrm{d}x = (b-a)\ell - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

et finalement on obtient la convergence et la valeur de l'intégrale suivante

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (f(a+x)-f(b+x))\,\mathrm{d}x = (b-a)\ell$$

Exercice 37 : [énoncé]
La fonction $f : x \mapsto \frac{\arctan(2x)-\arctan x}{x}$ est définie et continue par morceaux sur $]0,+\infty[$.
Quand $x \to 0^+$,

$$f(x) = \frac{2x - x + o(x)}{x} \to 1$$

Quand $x \to +\infty$,

$$f(x) = \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{2x} - \frac{\pi}{2} + \arctan\frac{1}{x}}{x} = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

Ainsi f est intégrable sur $]0,+\infty[$.
Pour $A \geqslant 0$,

$$\int_0^A \frac{\arctan(2x)-\arctan x}{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^A \frac{\arctan(2x)}{x}\,\mathrm{d}x - \int_0^A \frac{\arctan x}{x}\,\mathrm{d}x$$

avec convergence des deux nouvelles intégrale.
Par changement de variable $u = 2x$ sur la première,

$$\int_0^A \frac{\arctan(2x)-\arctan x}{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{2A} \frac{\arctan x}{x}\,\mathrm{d}x - \int_0^A \frac{\arctan x}{x}\,\mathrm{d}x = \int_A^{2A} \frac{\arctan x}{x}\,\mathrm{d}x$$

Par la croissance de la fonction arctan,

$$\arctan(A)\int_A^{2A} \frac{\mathrm{d}x}{x} \leqslant \int_A^{2A} \frac{\arctan x}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant \arctan(2A)\int_A^{2A} \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

A la limite quand $A \to +\infty$, on conclut

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(2x)-\arctan x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\ln 2$$

Exercice 38 : [énoncé]
On a
$$\frac{1}{1+X^4+X^8}=\frac{1-X^4}{1-X^{12}}$$
Les pôles de cette fraction rationnelle sont les éléments de $U_{12}\backslash U_4$ et ils sont simples.
On peut donc écrire en combinant les parties polaires conjuguées
$$\frac{1}{1+X^4+X^8}=2\mathrm{Re}\left(\frac{\alpha_1}{X-\omega_1}\right)+2\mathrm{Re}\left(\frac{\alpha_2}{X-\omega_2}\right)+2\mathrm{Re}\left(\frac{\alpha_4}{X-\omega_4}\right)+2\mathrm{Re}\left(\frac{\alpha_5}{X-\omega_5}\right)$$
avec $\omega_k=\exp(2ik\pi/12)$, les $\omega_1,\omega_2,\omega_4$ et ω_5 de parties imaginaires strictement positives.
$$\alpha_k=\left.\frac{1-X^4}{(1-X^{12})'}\right|_{X=\omega_k}=\frac{1}{12}\left(\omega_k^5-\omega_k\right)$$
Soit $\omega=a+ib\in\mathbb{C}$ avec $a\in\mathbb{R}$ et $b>0$. On a
$$\int_{-A}^{A}\frac{\mathrm{d}t}{t-\omega}=\int_{-A}^{A}\frac{(t-a)+ib}{(t-a)^2+b^2}\,\mathrm{d}t=\left[\frac{1}{2}\ln\left((t-a)^2+b^2\right)+i\arctan\frac{t-a}{b}\right]_{-A}^{A}\xrightarrow[A\to+\infty]{}i\pi$$
la limite de l'arc tangente étant obtenue sachant $b>0$.
Soit de plus $\alpha\in\mathbb{C}$.
$$\lim_{A\to+\infty}\left(\int_{-A}^{A}2\mathrm{Re}\left(\frac{\alpha}{t-\omega}\right)\,\mathrm{d}t\right)=2\mathrm{Re}\left(\lim_{A\to+\infty}\alpha\int_{-A}^{A}\frac{\mathrm{d}t}{t-\omega}\right)=-2\pi\mathrm{Im}\alpha$$
Puisque la convergence de l'intégrale que nous étudions est assurée
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^4+x^8}=\lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^4+x^8}$$
et on en déduit
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^4+x^8}=-2\pi\mathrm{Im}\left(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_4+\alpha_5\right)$$
ce qui donne
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^4+x^8}=\frac{\pi}{6}\mathrm{Im}\left(\omega^2-\omega^{10}+\omega^4-\omega^8\right)$$
Or
$$\omega^2-\omega^{10}=2i\sin\frac{\pi}{3}=i\sqrt{3}\text{ et }\omega^4-\omega^8=2i\sin\frac{2\pi}{3}=i\sqrt{3}$$
et finalement
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^4+x^8}=\frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

Exercice 39 : [énoncé]
a) Il suffit d'étudier la variation de la fonction $x\mapsto\mathrm{e}^x-(1+x)$ pour obtenir cette inégalité de convexité classique. On en déduit
$$1-t^2\leqslant\mathrm{e}^{-t^2}=\frac{1}{\mathrm{e}^{t^2}}\leqslant\frac{1}{1+t^2}$$
b) La fonction $t\mapsto\mathrm{e}^{-t^2}$ est définie et continue par morceaux sur $[0,+\infty[$. Puisque $t^2\mathrm{e}^{-t^2}\xrightarrow[t\to+\infty]{}0$, cette fonction est intégrable sur $[0,+\infty[$ ce qui assure l'existence de I.
La fonction $t\mapsto(1-t^2)^n$ est définie et continue par morceaux sur le segment $[0,1]$, donc l'intégrale définissant I_n existe.
La fonction $t\mapsto1/(1+t^2)^n$ est définie et continue par morceaux sur $[0,+\infty[$. Puisque $1/(1+t^2)^n\underset{t\to+\infty}{\sim}1/t^{2n}$ avec $2n>1$, cette fonction est intégrable sur $[0,+\infty[$ ce qui assure l'existence de J_n.
On a
$$(1-t^2)^n\leqslant\mathrm{e}^{-nt^2}\leqslant\frac{1}{(1+t^2)^n}$$
donc
$$I_n\leqslant\int_0^1\mathrm{e}^{-nt^2}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^{\sqrt{n}}\mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y\leqslant\frac{I}{\sqrt{n}}$$
et
$$\frac{I}{\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-nx^2}\,\mathrm{d}x\leqslant J_n$$
c) Le changement de variable $t=\sin x$ donne $I_n=W_{2n+1}$.
Le changement de variable $t=\tan x$ donne $J_{n+1}=W_{2n}$.
d) Par intégration par parties
$$W_{n+2}=\frac{n+1}{n+2}W_n$$
On en déduit $u_{n+1}=u_n$ donc la suite (u_n) est constante égale à
$$u_1=\pi/2$$
e) Puisque
$$\forall x\in[0,\pi/2]\,,(\cos x)^{n+1}\leqslant(\cos x)^n\leqslant(\cos x)^{n-1}$$
on obtient en intégrant
$$W_{n+1}\leqslant W_n\leqslant W_{n-1}$$
Or
$$W_{n+1}=\frac{n}{n+1}W_{n-1}\sim W_{n-1}$$

donc par encadrement
$$W_{n+1} \sim W_n$$
On en déduit
$$u_n \sim nW_n^2$$
puis
$$W_n \sim \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2n}}$$
Par suite
$$I_n \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}} \text{ et } J_n \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}$$
L'encadrement du b) donne alors
$$I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Exercice 40 : [énoncé]
La fonction $f : t \mapsto t\,[1/t]$ est définie et continue par morceaux sur $]0, +\infty[$.
Pour $t > 1$, $[1/t] = 0$ et donc $f(t) = 0$. Ainsi f est intégrable sur $[1, +\infty[$.
Pour $t > 0$, $1/t - 1 \leqslant [1/t] \leqslant 1/t$ et donc $f(t) \xrightarrow[t\to 0^+]{} 1$. Ainsi f est intégrable sur $]0, 1]$.
On a
$$I = \lim_{n\to+\infty} \int_{1/n}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t$$
Or
$$\int_{1/n}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{1/(k+1)}^{1/k} t\,[1/t]\,\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{1/(k+1)}^{1/k} kt\,\mathrm{d}t$$
puis
$$\int_{1/n}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{2k+1}{k(k+1)^2}$$
Par décomposition en éléments simples
$$\int_{1/n}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{(k+1)^2}\right)$$
et après réorganisation
$$\int_{1/n}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$
On en déduit
$$I = \frac{\pi^2}{12}$$

Exercice 41 : [énoncé]
Supposons f intégrable sur $]0, 1]$.
Par la décroissance de f, on remarque
$$\int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant \int_{(k-1)/n}^{k/n} f(t)\,\mathrm{d}t$$
En sommant pour k allant de 1 à $n - 1$, on obtient
$$\int_{1/n}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant S_n - \frac{1}{n} f(1) \leqslant \int_{0}^{1-1/n} f(t)\,\mathrm{d}t$$
Par théorème d'encadrement, on obtient
$$S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$$
Inversement, supposons la suite (S_n) convergente.
Par la décroissance de f, on a
$$\int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f\left(\frac{k}{n}\right)$$
En sommant pour k allant de 1 à $n - 1$, on obtient
$$\int_{1/n}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant S_n - \frac{1}{n} f(1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lim_{n\to+\infty} S_n$$
On en déduit que la suite des intégrales précédente est majorée et puisque la fonction f est positive, cela suffit pour conclure que l'intégrale de f converge.

Exercice 42 : [énoncé]
Comme $a > 0$, $t^2 \sin t\,\mathrm{e}^{-at} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$, la fonction continue par morceaux $t \mapsto \sin(t)\mathrm{e}^{-at}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$et $I(a) = \int_0^{+\infty} \sin(t)\mathrm{e}^{-at}\mathrm{d}t$ converge.
$$I(a) = \operatorname{Im}\left(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{it-at}\mathrm{d}t\right) = \operatorname{Im}\left(\left[\frac{1}{i-a}\mathrm{e}^{it-at}\right]_0^{+\infty}\right) = \frac{1}{a^2+1}$$

Exercice 43 : [énoncé]
La fonction $t \mapsto \frac{\ln t}{a^2+t^2}$ est définie et continue par morceaux sur $]0,+\infty[$.
Cette fonction est intégrable car

$$\sqrt{t}\frac{\ln t}{a^2+t^2} \xrightarrow[t\to 0+]{} 0 \text{ et } t^{3/2}\frac{\ln t}{a^2+t^2} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$$

L'intégrale définissant $I(a)$ est donc bien définie.
Par le changement de variable $\mathcal{C}^1$ bijectif proposé

$$I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{a^2+t^2}\,\mathrm{d}t \underset{u=a/t}{=} \int_0^{+\infty} \frac{\ln a - \ln u}{a(u^2+1)}\mathrm{d}u = \frac{\ln a}{a}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{u^2+1} - \frac{1}{a}I(1)$$

Pour $a=1$, on obtient $I(1)=0$ et donc

$$I(a) = \frac{\ln a}{a}\frac{\pi}{2}$$

Exercice 44 : [énoncé]
L'intégrabilité est entendue.
Par le changement de variable $u = a^2/t$ on obtient

$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln t}{t^2+a^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty}\frac{2\ln a - \ln u}{a^2+u^2}\,\mathrm{d}u$$

donc

$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln t}{t^2+a^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2a}\ln a$$

Exercice 45 : [énoncé]
1ère méthode :
La fonction $t\mapsto \frac{1}{(1+t^2)(1+t^a)}$ est définie et continue par morceaux sur $]0,+\infty[$.
Quand $t\to+\infty$

$$\frac{1}{(1+t^2)(1+t^a)} \sim \begin{cases} 1/t^{a+2} & \text{si } a>0\\ 1/2t^2 & \text{si } a=0\\ 1/t^2 & \text{si } a<0\end{cases}$$

donc la fonction $t\mapsto \frac{1}{(1+t^2)(1+t^a)}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$.
Quand $t\to 0^+$

$$\frac{1}{(1+t^2)(1+t^a)} \to \begin{cases} 1 & \text{si } a>0\\ 1/2 & \text{si } a=0\\ 0 & \text{si } a<0\end{cases}$$

donc la fonction $t\mapsto\frac{1}{(1+t^2)(1+t^a)}$ est intégrable sur $]0,1]$.
Finalement $I(a)$ est définie pour tout $a\in\mathbb{R}$.
2ème méthode :
Comme

$$0 \leqslant \frac{1}{(1+t^2)(1+t^a)} \leqslant \frac{1}{1+t^2}$$

avec la fonction $t\mapsto\frac{1}{1+t^2}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$, on peut affirmer que par comparaison de fonctions positives $t\mapsto\frac{1}{(1+t^2)(1+t^a)}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ et $I(a)$ converge.
Les deux intégrales étant bien définies :

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)(1+t^a)} = \int_0^{+\infty}\frac{u^a\mathrm{d}u}{(1+u^2)(1+u^a)}$$

Par suite

$$2I(a) = \int_0^{+\infty}\frac{(1+t^a)\mathrm{d}t}{(1+t^2)(1+t^a)} = \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = [\arctan t]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$$

Finalement

$$I(a) = \frac{\pi}{4}$$

Exercice 46 : [énoncé]
La fonction $f : t\mapsto \sqrt{t}+a\sqrt{t+1}+b\sqrt{t+2}$ est définie et continue par morceaux sur $[0,+\infty[$.
Par développements limités

$$f(t) = (1+a+b)\sqrt{t} + \frac{a+2b}{2}\frac{1}{\sqrt{t}} + O\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right) \text{ quand } t\to+\infty$$

Si $1+a+b\neq 0$ alors $f(t)\xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$ ou $-\infty$ et l'intégrale n'est assurément pas convergente.
Si $1+a+b=0$ et $a+2b\neq 0$ alors $f(t)\sim\frac{\lambda}{t^{1/2}}$ avec $\lambda\neq 0$. Par équivalence de fonction de signe constant au voisinage de $+\infty$, on peut affirmer que l'intégrale diverge.
Si $1+a+b=0$ et $a+2b=0$ i.e. $(a,b)=(-2,1)$ alors $f(t)=O\left(1/t^{3/2}\right)$ et donc f est intégrable.
Finalement, l'intégrale étudiée converge si, et seulement si, $(a,b)=(-2,1)$.
Supposons que tel soit le cas.

$$\int_0^x\left(\sqrt{t}-2\sqrt{t+1}+\sqrt{t+2}\right)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{3}\left[t^{3/2}-2(t+1)^{3/2}+(t+2)^{3/2}\right]_0^x$$

Par développements limités

$$x^{3/2}-2(x+1)^{3/2}+(x+2)^{3/2}\sim\frac{3}{4\sqrt{x}}\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$$

et donc

$$\int_0^{+\infty}\left(\sqrt{t}+a\sqrt{t+1}+b\sqrt{t+2}\right)\,\mathrm{d}t=\frac{4}{3}\left(1-\sqrt{2}\right)$$

Exercice 47 : [énoncé]
La fonction $f:t\mapsto(t-\lfloor t\rfloor)\mathrm{e}^{-at}$ est définie et continue par morceaux sur $[0,+\infty[$.
Quand $t\to+\infty$, $t^2f(t)\to0$ donc f est intégrable sur $[0,+\infty[$.

$$\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t=\sum_{k=0}^{n-1}\int_k^{k+1}f(t)\,\mathrm{d}t=\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^1 t\mathrm{e}^{-a(t+k)}\,\mathrm{d}t=\frac{1-\mathrm{e}^{-na}}{1-\mathrm{e}^{-a}}\frac{1-(a+1)\mathrm{e}^{-a}}{a^2}$$

Quand $n\to+\infty$,

$$\int_0^{+\infty}f(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1-(a+1)\mathrm{e}^{-a}}{a^2(1-\mathrm{e}^{-a})}$$

Exercice 48 : [énoncé]
a) $x\mapsto f(x+a)-f(x)$ est continue et positive (car f est croissante).

$$\int_0^A f(x+a)-f(x)\mathrm{d}x=\int_a^{A+a}f(x)\mathrm{d}x-\int_0^A f(x)\mathrm{d}x=\int_A^{A+a}f(x)\mathrm{d}x-\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$$

Or $f(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}\ell$ donc

$$\forall\varepsilon>0,\exists M\in\mathbb{R},x\geqslant M\Rightarrow|f(x)-\ell|\leqslant\varepsilon$$

et alors

$$\forall A\geqslant M,\left|\int_A^{A+a}f(x)\mathrm{d}x-a\ell\right|\leqslant\int_A^{A+a}|f(x)-\ell|\,\mathrm{d}x\leqslant a\varepsilon$$

donc

$$\int_A^{A+a}f(x)\mathrm{d}x\xrightarrow[A\to+\infty]{}a\ell$$

puis

$$\int_0^A f(x+a)-f(x)\mathrm{d}x\xrightarrow[A\to+\infty]{}a\ell-\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$$

On peut conclure que $\int_0^{+\infty}f(x+a)-f(x)\,\mathrm{d}x$ est définie et

$$\int_0^{+\infty}f(x+a)-f(x)\,\mathrm{d}x=a\ell-\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$$

b) Comme ci-dessus, mais en faisant $A\to-\infty$, on établie

$$\int_0^{-\infty}f(x+a)-f(x)\,\mathrm{d}x=a\ell'-\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$$

avec $\ell'=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$. Par conséquent $\int_{-\infty}^{+\infty}\arctan(x+a)-\arctan(x)\,\mathrm{d}x$ est définie par application du théorème de Chasles et

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\arctan(x+a)-\arctan(x)\,\mathrm{d}x=\pi a$$

Exercice 49 : [énoncé]
Par le changement de variable $u=\tan\frac{t}{2}$ on parvient à l'intégrale

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{8u^2\,\mathrm{d}u}{(1+u^2)((1-x)^2+(1+x)^2u^2)((1-y)^2+(1+y)^2u^2)}$$

On peut réaliser une décomposition en éléments simples réelles de la fraction rationnelle intégrée qui pour des raisons de parité sera de la forme

$$\frac{a}{1+u^2}+\frac{b}{(1-x)^2+(1+x)^2u^2}+\frac{c}{(1-y)^2+(1+y)^2u^2}$$

avec

$$a=-\frac{1}{2xy},\ b=-\frac{(1-x)^2(1+x)^2}{2x(x-y)(1-xy)}\text{ et }c=-\frac{(1-y)^2(1+y)^2}{2y(y-x)(1-xy)}$$

sous réserve que $x\neq y$ et $xy\neq0$.
Puisque

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{\alpha^2+\beta^2u^2}=\frac{1}{\alpha\beta}\frac{\pi}{2}$$

on parvient à

$$I=\frac{\pi}{2}\left(-\frac{1}{2xy}-\frac{1-x^2}{2x(x-y)(1-xy)}+\frac{1-y^2}{2y(x-y)(1-xy)}\right)=\frac{\pi}{2(1-xy)}$$

Les cas exclus $x\neq y$ et $xy\neq0$ peuvent être récupérés par continuité.
Il m'a peut-être échappé une démarche plus simple...

Exercice 50 : [énoncé]
On peut écrire
$$1+(t+ib)^2=(t+i(b+1))(t+i(b-1))$$
Si $b=\pm 1$ la fonction n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}$ à cause d'une singularité en 0.
Si $b\neq\pm 1$ alors la fonction $f:t\mapsto\frac{1}{1+(t+ib)^2}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et $f(t)=O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ quand $t\to\pm\infty$ donc f est intégrable sur $\mathbb{R}$.
En procédant à une décomposition en éléments simples :
$$\int_{-A}^{A}\frac{\mathrm{d}t}{1+(t+ib)^2}=\frac{i}{2}\left[\frac{1}{2}\ln(t^2+(b+1)^2)+\arctan\left(\frac{t}{b+1}\right)\right]_{-A}^{A}-\frac{i}{2}\left[\frac{1}{2}\ln(t^2+(b-1)^2)+\arctan\left(\frac{t}{b-1}\right)\right]_{-A}^{A}$$
Si $|b|>1$ alors
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+(t+ib)^2}=0$$
Si $|b|<1$ alors
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+(t+ib)^2}=\pi$$

Exercice 51 : [énoncé]
Le discriminant du trinôme $x^2+\alpha x+1$ vaut $\Delta=\alpha^2-4$.
Cas $|\alpha|<2$
On a $\Delta<0$, le trinôme ne s'annule pas et la fonction $x\mapsto 1/(x^2+\alpha x+1)$ est définie et continue par morceaux sur $[0,+\infty[$. La fonction est intégrable car équivalente à $1/x^2$ en $+\infty$.
Cas $\alpha\geqslant 2$, le trinôme ne s'annule pas sur $[0,+\infty[$ car il est somme de termes positifs. A nouveau la fonction $x\mapsto 1/(x^2+\alpha x+1)$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.
Cas $\alpha\leqslant 2$, le trinôme $x^2+\alpha x+1$ présente deux racines positives et la fonction $x\mapsto 1/(x^2+\alpha x+1)$ n'est pas définie sur l'intégralité de l'intervalle $]0,+\infty[$.
Même en découpant l'intégrale aux points singuliers, on peut observer que les intégrales introduites ne sont pas définies. On ne parvient donc pas à donner un sens à l'intégrale étudiée dans ce cas.
Reste à calculer l'intégrale.
Cas $|\alpha|<2$
Le trinôme $x^2+\alpha x+1$ s'écrit peut se réécrire
$$\left(x+\frac{\alpha}{2}\right)^2+a^2\text{ avec }a=\sqrt{1-\frac{\alpha^2}{4}}$$
On a alors
$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+\alpha x+1}=\left[\frac{1}{a}\arctan\left(\frac{2x+\alpha}{a}\right)\right]_0^{+\infty}$$
puis
$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+\alpha x+1}=\frac{1}{a}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan\left(\frac{\alpha}{a}\right)\right)$$
Cas $\alpha=2$
$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+1}=\left[-\frac{1}{x+1}\right]_0^{+\infty}=1$$
Cas $\alpha>2$
Le trinôme $x^2+\alpha x+1$ à deux racines x_0,x_1 distinctes strictement négatives.
$$x_0=\frac{-\alpha-\sqrt{\Delta}}{2}\text{ et }x_1=\frac{-\alpha+\sqrt{\Delta}}{2}$$
Par décomposition en éléments
$$\frac{1}{x^2+\alpha x+1}=\frac{a}{x-x_0}+\frac{b}{x-x_1}$$
avec
$$a=\frac{1}{x_1-x_0}=\frac{1}{\sqrt{\Delta}}\text{ et }b=\frac{1}{x_0-x_1}=-a$$
On a alors
$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+\alpha x+1}=\frac{1}{x_1-x_0}\left[\ln\frac{x-x_0}{x-x_1}\right]_0^{+\infty}=\frac{1}{\sqrt{\Delta}}\ln\frac{\alpha+\sqrt{\Delta}}{\alpha-\sqrt{\Delta}}$$

Exercice 52 : [énoncé]
La fonction $t\mapsto\frac{1}{t^2+pt+q}$ est définie et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. Puisque
$$\frac{1}{t^2+pt+q}\underset{t\to\pm\infty}{\sim}\frac{1}{t^2}$$
la fonction $t\mapsto\frac{1}{t^2+pt+q}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^2+pt+q}\text{ converge}$$
On a
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^2+pt+q}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{\left(t+\frac{p}{2}\right)^2+\frac{4q-p^2}{4}}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{u^2+a^2}$$
avec $a=\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}$ donc
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^2+pt+q}=\frac{1}{a}\left[\arctan\frac{u}{a}\right]_{-\infty}^{+\infty}=\frac{2\pi}{\sqrt{4q-p^2}}$$

Exercice 53 : [énoncé]
La fonction $t \mapsto \frac{1}{(t^2+a^2)(t^2+b^2)}$ est définie et continue par morceaux sur $]-\infty,+\infty[$.
Quand $t \to +\infty$, $f(t) \sim \frac{1}{t^4}$ donc f est intégrable sur $[0,+\infty[$.
Quand $t \to -\infty$, $f(t) \sim \frac{1}{t^4}$ donc f est intégrable sur $]-\infty,0]$
On remarque

$$\frac{1}{t^2+a^2} - \frac{1}{t^2+b^2} = \frac{b^2-a^2}{(t^2+a^2)(t^2+b^2)}$$

Pour $a \neq b$

$$I(a,b) = \frac{1}{b^2-a^2}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+a^2} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+b^2}\right)$$

avec convergence des deux intégrales introduites.
Ainsi

$$I(a,b) = \frac{\pi}{ab(a+b)}$$

Pour $a = b$,

$$I(a,a) = \frac{1}{a^2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(t^2+a^2-t^2)\mathrm{d}t}{(t^2+a^2)^2} = \frac{1}{a^2}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+a^2)} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2}{(t^2+a^2)^2}\,\mathrm{d}t\right)$$

Par intégration par parties (avec deux convergences)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t \times t}{(t^2+a^2)^2}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{2}\frac{t}{t^2+a^2}\right]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+a^2} = \frac{\pi}{2a}$$

donc

$$I(a,a) = \frac{\pi}{2a^3}$$

Exercice 54 : [énoncé]
La fonction $t \mapsto P(t)/Q(t)$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
Pour $|t| \to +\infty$, $P(t)/Q(t) = O\left(1/t^2\right)$ car $\deg(P/Q) \leqslant -2$.
Par suite l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} \frac{P}{Q}$ converge.
Les pôles de la fraction P/Q sont complexes conjugués non réels et les parties polaires correspondantes sont deux à deux conjuguées. On en déduit que $P/Q = 2\mathrm{Re}(F)$ où F est la fraction rationnelle obtenue en sommant les parties polaires relatives aux pôles de partie imaginaire strictement positive.
Considérons un pôle $a = \alpha + i\beta$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta > 0$.
Pour les éléments simples de la forme $\frac{1}{(X-a)^m}$ avec $m > 1$, on a
$\int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}t}{(t-a)^m} = \left[-\frac{1}{m-1}\frac{1}{(t-a)^{m-1}}\right]_{-\infty}^{+\infty} = 0.$
Pour les éléments simples de la forme $\frac{1}{X-a}$ on a
$\int_{-A}^{A} \frac{\mathrm{d}t}{t-a} = \int_{-A}^{A} \frac{t-\alpha+i\beta}{(t-\alpha)^2+\beta^2} = \left[\ln|t-a| + i\arctan\left(\frac{t-\alpha}{\beta}\right)\right]_{-A}^{A}$. Quand $A \to +\infty$, on obtient $\int_{-A}^{A} \frac{\mathrm{d}t}{t-a} \to i\pi$.
Puisque $\int_{\mathbb{R}} \frac{P}{Q} = \lim_{A\to+\infty} \int_{-A}^{A} \frac{P(t)}{Q(t)}\,\mathrm{d}t$, on obtient $\int_{\mathbb{R}} \frac{P}{Q} = 2\mathrm{Re}(\sigma)\pi$ avec σ la somme des coefficients facteurs des éléments simples $\frac{1}{X-a}$ avec a de parties imaginaires strictement positive.

Exercice 55 : [énoncé]
a) On écrit $z = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. En multipliant par la quantité conjuguée

$$\int_{-A}^{A} \frac{\mathrm{d}t}{t-z} = \int_{-A}^{A} \frac{t-a+ib}{(t-a)^2+b^2}\,\mathrm{d}t$$

puis

$$\int_{-A}^{A} \frac{\mathrm{d}t}{t-z} = \left[\frac{1}{2}\ln\left((t-a)^2+b^2\right)\right]_{-A}^{A} + i\left[\arctan\frac{t-a}{b}\right]_{-A}^{A}$$

donc

$$\int_{-A}^{A} \frac{\mathrm{d}t}{t-z} \xrightarrow[A\to+\infty]{} \begin{cases} i\pi & \text{si } \mathrm{Im} z > 0 \\ -i\pi & \text{sinon} \end{cases}$$

b) Les pôles de F sont assurément non réels.
La partie entière de F est nécessairement nulle car F est intégrable.
Dans la décomposition en éléments simples de F, les termes en $1/(X-a)^k$ avec $k \geqslant 2$ déterminent des expressions intégrables. Puisque F est aussi intégrable, on peut affirmer par différence que le terme

$$\sum_{a\in P} \frac{R_a}{(t-a)}$$

(avec P l'ensemble des pôles de F) est intégrable sur $\mathbb{R}$. Or

$$t \times \sum_{a\in P} \frac{R_a}{(t-a)} \xrightarrow[t\to+\infty]{} \sum_{a\in P} R_a$$

Il est donc nécessaire que

$$\sum_{a\in P} R_a = 0$$

c) Les termes en $1/(X-a)^k$ (avec $k \geqslant 2$) de la décomposition en éléments simples de F induisent des intégrales sur $\mathbb{R}$ nulles. Par conséquent

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{a\in P} \frac{R_a}{t-a}\,\mathrm{d}t = \lim_{A\to+\infty} \sum_{a\in P} \int_{-A}^{A} \frac{R_a}{t-a}\,\mathrm{d}t$$

Puisque les parties polaires sont deux à deux conjuguées

$$\sum_{a\in P} \int_{-A}^{A} \frac{R_a}{t-a}\,\mathrm{d}t = \sum_{a\in P^+} \int_{-A}^{A} \frac{R_a}{t-a} + \frac{\overline{R_a}}{t-\bar{a}}\,\mathrm{d}t$$

puis

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F = 2i\pi \sum_{a\in P^+} \mathrm{Im}(R_a)$$

Mais

$$\sum_{a\in P} R_a = 0$$

donne

$$\sum_{a\in P^+} R_a + \overline{R_a} = 2\sum_{a\in P^+} \mathrm{Re}(R_a) = 0$$

Finalement

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F = 2i\pi \sum_{a\in P^+} R_a$$

d) Puisque $n \geqslant m+1$, l'intégrabilité est acquise. Les pôles de la fraction

$$\frac{X^{2m}}{1+X^{2n}}$$

sont simples et ce sont les

$$z_k = \mathrm{e}^{\frac{i(2k+1)}{2n}\pi}$$

avec $k \in \{0,\dots,2n-1\}$.
Pour chaque $k \in \{0,\dots,2n-1\}$,

$$R_{z_k} = \left.\frac{X^{2m}}{(1+X^{2n})'}\right|_{X=z_k} = -\frac{z_k^{2m+1}}{2n}$$

Les pôles de parties imaginaires positives sont obtenus pour $k \in \{0,\dots,n-1\}$ et après sommation géométrique on obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{n\sin\left(\frac{(2m+1)\pi}{2n}\right)}$$

Exercice 56 : [énoncé]
a) La fonction définissant l'intégrande est définie et continue par morceaux sur $]0,+\infty[$. Elle est prolongeable par continuité en 0 et négligeable devant $1/x^2$ en $+\infty$. Elle est donc intégrable.
b) Procédons au changement de variable $u = a/x$ sur l'intégrale de $\sqrt{a}$ à $+\infty$

$$\int_{\sqrt{a}}^{+\infty} \exp\left(-\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)\right)\mathrm{d}x = \int_0^{\sqrt{a}} \exp\left(-\left(\frac{a^2}{u^2}+u^2\right)\right)\frac{a}{u^2}\,\mathrm{d}u$$

En renommant la variable d'intégration et en regroupant les intégrales sur $]0,\sqrt{a}]$ et $[\sqrt{a},+\infty[$, on obtient

$$I(a) = \int_0^{\sqrt{a}} \exp\left(-\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)\right)\left(1+\frac{a}{x^2}\right)\mathrm{d}x$$

c) On peut écrire

$$x^2+\frac{a^2}{x^2} = \left(x-\frac{a}{x}\right)^2 + 2a$$

avec

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x-\frac{a}{x}\right) = 1+\frac{a}{x^2}$$

ce qui motive le changement de variable $t = x - a/x$

$$I(a) = \int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{-t^2-2a}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{e}^{-2a}$$

Par parité

$$I(a) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{e}^{-2|a|} \text{ pour } a \in \mathbb{R}$$

Exercice 57 : [énoncé]
a) L'intégrale en premier membre existe et définit une fonction dérivable de x avec

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_x^{+\infty} \frac{f(at)-f(bt)}{t}\,\mathrm{d}t\right) = -\frac{f(ax)-f(bx)}{x}$$

L'intégrale en second membre définit aussi une fonction dérivable de x avec

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_{ax}^{bx} \frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u\right) = b\frac{f(bx)}{bx} - a\frac{f(ax)}{ax} = \frac{f(bx)-f(ax)}{x}$$

On en déduit que les deux membres de l'égalité voulue sont égaux à une constante près.

Or ces deux fonctions de x sont de limite nulle quand $x \to +\infty$ et la constante précédente est alors nulle.
b) Par continuité de f en 0, on peut écrire

$$f(t) = f(0) + \varphi(t) \text{ avec } \varphi \text{ de limite nulle en } 0$$

On a alors

$$\int_{ax}^{bx} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t = f(0)\ln\frac{b}{a} + \int_{ax}^{bx} \frac{\varphi(t)}{t}\,\mathrm{d}t$$

Or

$$\left|\int_{ax}^{bx} \frac{\varphi(t)}{t}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \max_{t\in[ax,bx]}|\varphi(t)| \int_{ax}^{bx}\frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln\frac{b}{a}\max_{t\in[ax,bx]}|\varphi(t)| \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$$

On conclut à la convergence de l'intégrale et à la valeur

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(at)-f(bt)}{t}\,\mathrm{d}t = f(0)\ln\frac{b}{a}$$

Exercice 58 : [énoncé]
Par le changement de variable proposé (qui est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$), on obtient

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{1+\mathrm{e}^{-2x}}{1+\mathrm{e}^{-4x}}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$$

qui se réécrit

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{ch}t}{\mathrm{ch}2t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{ch}t}{1+2\mathrm{sh}^2 t}\,\mathrm{d}t$$

et donc

$$I = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\arctan(\sqrt{2}\mathrm{sh}t)\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

Exercice 59 : [énoncé]
a) L'intégrale de départ est bien définie. En effet, la fonction
$f : x \mapsto (1+x^2)/(1+x^4)$ est définie et continue par morceaux sur $[0,+\infty[$ et on vérifie $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} 1/x^2$ ce qui donne un argument d'intégrabilité.
Par le changement de variable $\mathcal{C}^1$ strictement croissant $x = \mathrm{e}^t$,

$$\int_0^{+\infty}\frac{1+x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{2t}+1}{\mathrm{e}^{4t}+1}\mathrm{e}^t\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{ch}t}{\mathrm{ch}2t}\mathrm{d}t$$

Or

$$\mathrm{ch}2t = 2\mathrm{ch}^2t - 1 = 1 + 2\mathrm{sh}^2 t$$

Par le nouveau changement de variable $\mathcal{C}^1$ strictement croissant $u = \mathrm{sh}t$

$$\int_0^{+\infty}\frac{1+x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{1+2u^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\arctan(\sqrt{2}u)\right]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

b) Par le changement de variable $\mathcal{C}^1$ strictement monotone $x = 1/t$, on obtient

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^4} = \int_0^{+\infty}\frac{x^2\mathrm{d}x}{1+x^4}$$

et donc

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

Exercice 60 : [énoncé]
$f : t \mapsto \frac{1}{(1+t^2)^2}$ est définie et continue sur $[0,+\infty[$ et $f(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^4}$ donc I existe.
Via le changement de variable $u = 1/t$:

$$I = \int_0^{+\infty}\frac{u^2\,\mathrm{d}u}{(1+u^2)^2}$$

d'où

$$2I = \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}$$

puis $I = \frac{\pi}{4}$.

Exercice 61 : [énoncé]
a) Les deux intégrales convergent. Le changement de variable $u = 1/x$ transforme l'une en l'autre.
b)

$$2I = \int_0^{+\infty}\frac{(x+1)\,\mathrm{d}x}{x^3+1} = \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2-x+1} = \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \left[\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right]_0^{+\infty}$$

donc

$$I = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

Exercice 62 : [énoncé]
On a
$$\sqrt{\tan\theta} \underset{\theta=\pi/2-h}{=} \sqrt{\frac{\sin(\pi/2-h)}{\cos(\pi/2-h)}} = \sqrt{\frac{\cos h}{\sin h}} \sim \frac{1}{\sqrt{h}}$$
donc l'intégrale est bien définie.
$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan\theta}\,\mathrm{d}\theta \underset{u=\sqrt{\tan\theta}}{=} \int_0^{+\infty} \frac{2u^2}{1+u^4}\mathrm{d}u = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$
après calculs...

Exercice 63 : [énoncé]
On procède au changement de variable
$$x = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sin t$$
avec $t\in[-\pi/2,\pi/2]$.
On obtient
$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1-x)}} = \pi$$
(avec convergence de l'intégrale) et
$$\int_0^1 \sqrt{x(1-x)}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{8}$$

Exercice 64 : [énoncé]
Considérons l'application continue $\varphi : x\mapsto x-1/x$. Par étude des variations de φ, on peut affirmer que φ réalise une bijection φ_+ de $]0,+\infty[$ vers $\mathbb{R}$ et une bijection φ_- de $]-\infty,0[$ vers $\mathbb{R}$.
Après résolution de l'équation $\varphi(x)=y$ d'inconnue x, on obtient
$$\varphi_+^{-1}(y) = \frac{1}{2}\left(y+\sqrt{y^2+4}\right) \text{ et } \varphi_-^{-1}(y) = \frac{1}{2}\left(y-\sqrt{y^2+4}\right)$$
Formellement, par le changement de variable $y=\varphi_+(x)$ avec φ_+ bijection de classe $\mathcal{C}^1$
$$\int_0^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\frac{1}{2}\left(1+\frac{y}{\sqrt{y^2+4}}\right)\mathrm{d}y$$
Puisque f est intégrable et que
$$\left|\frac{1}{2}\left(1+\frac{y}{\sqrt{y^2+4}}\right)\right| \leqslant 1$$
la fonction
$$y\mapsto f(y)\frac{1}{2}\left(1+\frac{y}{\sqrt{y^2+4}}\right)$$
est intégrable sur $\mathbb{R}$.
Par le changement de variable précédent, on peut alors affirmer que g est intégrable sur $]0,+\infty[$.
L'étude sur $]-\infty,0[$ est semblable.
Au final, on obtient
$$\int_{-\infty}^0 g(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\left(1-\frac{y}{\sqrt{y^2+4}}\right)\mathrm{d}y+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\left(1+\frac{y}{\sqrt{y^2+}}\right.$$

Exercice 65 : [énoncé]
Comme $t^2\times t^n\mathrm{e}^{-t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$, la fonction continue par morceaux $t\mapsto t^n\mathrm{e}^{-t}$ est donc intégrable sur $[0,+\infty[$ et $I_n=\int_0^{+\infty} t^n\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ converge.
Par intégration par parties justifiée par deux convergences
$$I_{n+1} = \left[-t^{n+1}\mathrm{e}^{-t}\right]_0^{+\infty} + (n+1)\int_0^{+\infty} t^n\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = (n+1)I_n.$$
Comme $I_0=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = 1$ on a
$$I_n = n!$$

Exercice 66 : [énoncé]
La fonction $x\mapsto x^n(\ln x)^n$ est définie et continue sur $]0,1]$ et y est intégrable car on peut la prolonger par continuité en 0 sachant $x\ln x \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$. L'intégrale définissant I_n est donc convergente.
Soit $\varepsilon\in]0,1]$. Par intégration par parties
$$\int_\varepsilon^1 x^n(\ln x)^n\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}(\ln x)^n\right]_\varepsilon^1 - \frac{n}{n+1}\int_\varepsilon^1 x^n(\ln x)^{n-1}\,\mathrm{d}x$$

Quand $\varepsilon \to 0$, on obtient

$$I_n = -\frac{n}{n+1}\int_0^1 x^n (\ln x)^{n-1}\,\mathrm{d}x$$

la nouvelle intégrale étant convergente par le même argument qu'au dessus.
En répétant l'opération, on obtient

$$I_n = (-1)^n \frac{n!}{(n+1)^n}\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = (-1)^n\frac{n!}{(n+1)^{n+1}}$$

On peut aussi procéder au calcul par le changement de variable $u = -\ln(x^{n+1})$ $\mathcal{C}^1$ strictement monotone

$$I_n = \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}\int_0^{+\infty} u^n \mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u = \frac{(-1)^n n!}{(n+1)^{n+1}}$$

Exercice 67 : [énoncé]
$f : x \mapsto \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^+$.
$f(x) \underset{x\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ donc f est intégrable et $I_n = \int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ existe.
Pour $n \in \mathbb{N}^\star$:

$$I_n = \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^{n+1}} = \int_0^{+\infty}\frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}x = I_{n-1} - \int_0^{+\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}x$$

Or

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}x \underset{\text{ipp}}{=} \left[-\frac{1}{2}\frac{1}{n}\frac{x}{(1+x^2)^n}\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{2n}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^n} = \frac{1}{2n}I_{n-1}$$

L'intégration par parties est justifiée par deux convergences.
On obtient ainsi

$$I_n = \frac{2n-1}{2n}I_{n-1}$$

Puisque $I_0 = \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$,

$$I_n = \frac{(2n-1)(2n-3)\dots 1}{(2n)(2n-2)\dots 2}I_0 = \frac{(2n)!}{2^{2n+1}(n!)^2}\pi$$

Exercice 68 : [énoncé]
a) La fonction f est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$.
Quand $t \to 0^+$, $\sqrt{t}f(t) \to 0$ et quand $t \to +\infty$, $t^{3/2}f(t) \to 0$ donc f est intégrable sur $]0,1]$ et $[1,+\infty[$.
b) Par une intégration par parties où l'on choisit judicieusement une primitive s'annulant en 0

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t = \left[\ln t\left(1-\frac{1}{1+t}\right)\right]_0^1 - \int_0^1\frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t = -\ln 2$$

Par le changement de variable $u = 1/t$

$$\int_1^{+\infty}\frac{\ln t}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t = -\int_0^1\frac{\ln u}{(u+1)^2}\,\mathrm{d}u = \ln 2$$

Exercice 69 : [énoncé]
$f : x \mapsto \frac{\ln(1-x^2)}{x^2}$ est définie et continue sur $]0,1[$.
Quand $x \to 0^+$: $f(x) \sim \frac{-x^2}{x^2} = -1$ ce qui permet de prolonger f par continuité en 0.
Quand $x \to 1^-$: $x = 1-h$ avec $h \to 0^+$ et

$$\sqrt{1-x}f(x) = \sqrt{h}\frac{\ln(2h-h^2)}{(1-h)^2} \sim \sqrt{h}\ln h \to 0$$

Nous allons calculer l'intégrale en procédant par intégration par parties en primitivant $\frac{1}{x^2}$ en $\frac{x-1}{x}$ qui s'annule en 1.

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-x^2)}{x^2}\,\mathrm{d}x = \left[\ln(1-x^2)\frac{x-1}{x}\right]_0^1 + \int_0^1\frac{2x}{(1-x^2)}\frac{x-1}{x}\,\mathrm{d}x$$

L'intégration par parties car le crochet converge. On en déduit

$$\int_0^1\frac{\ln(1-x^2)}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\int_0^1\frac{2}{(1+x)}\,\mathrm{d}x = -2\ln 2$$

Exercice 70 : [énoncé]
La fonction $f : t \mapsto \ln\left(1+1/t^2\right)$ est définie et continue par morceaux sur $]0,+\infty[$.
Quand $t \to +\infty$, on a $f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} 1/t^2$ en exploitant $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{\sim} u$.
Quand $t \to 0$, $\sqrt{t}f(t) = \sqrt{t}\ln(1+t^2) - 2\sqrt{t}\ln t \to 0$ et donc $f(t) = o\left(1/\sqrt{t}\right)$
On en déduit que f est intégrable et l'intégrale étudiée converge.

Par intégration par parties

$$\int_{\varepsilon}^{A} \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right) \mathrm{d}t = \left[t\ln\left(1+1/t^2\right)\right]_{\varepsilon}^{A} + \int_{\varepsilon}^{A} \frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}$$

Par des arguments asymptotiques semblables à ceux utilisés ci-dessus, on montre

$$A\ln\left(1+1/A^2\right) \xrightarrow[A\to+\infty]{} 0$$

et

$$\varepsilon\ln\left(1+1/\varepsilon^2\right) \xrightarrow[\varepsilon\to0^+]{} 0$$

On en déduit

$$\int_{0}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right) \mathrm{d}t = 2\int_{0}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \pi$$

Notons que le calcul ici réalisé peut aussi être utilisé pour justifier la convergence de l'intégrale.

Exercice 71 : [énoncé]
Les fonctions u et v sont définies et continues par morceaux sur $[1,+\infty[$.
Puisque l'intégrale de f sur $[1,+\infty[$ converge, on a

$$u(x) = O\left(\frac{1}{x^2}\right) \text{ quand } x\to+\infty$$

et donc u est intégrable sur $[1,+\infty[$.
Puisque $1/x \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, on a

$$v(x) = o\left(f(x)\right) \text{ quand } x\to+\infty$$

et donc v aussi est intégrable sur $[1,+\infty[$.
Par intégration par parties

$$\int_{1}^{A} u(x)\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{x}\int_{1}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t\right]_{1}^{A} + \int_{1}^{A} v(x)\,\mathrm{d}x$$

et donc $A\to+\infty$ on obtient

$$\int_{1}^{+\infty} u(x)\,\mathrm{d}x = \int_{1}^{+\infty} v(x)\,\mathrm{d}x$$

Exercice 72 : [énoncé]
Quand $t\to0^+$,

$$\frac{f(t)}{t} = \frac{f(t)-f(0)}{t} \to f'(0)$$

La fonction $t\mapsto f(t)/t$ peut donc se prolonger par continuité en 0 ce qui permet d'assurer l'existence des intégrales écrites.
Par intégration par parties

$$\int_{\varepsilon}^{x}\left(\frac{f(t)}{t}\right)^2 \mathrm{d}t = \left[-\frac{(f(t))^2}{t}\right]_{\varepsilon}^{x} + 2\int_{\varepsilon}^{x} \frac{f(t)f'(t)}{t}\,\mathrm{d}t$$

Quand $\varepsilon\to0^+$, on obtient

$$\int_{0}^{x}\left(\frac{f(t)}{t}\right)^2 \mathrm{d}t = -\frac{(f(x))^2}{x} + 2\int_{0}^{x} \frac{f(t)f'(t)}{t}\,\mathrm{d}t$$

et l'inégalité affirmée est désormais évidente.

Exercice 73 : [énoncé]
a) $x\mapsto u'(x)$, $x\mapsto u(x)$ et $x\mapsto xu(x)$ sont de carrés intégrables donc $x\mapsto (xu(x)^2)' = u(x)^2 + xu'(x)u(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. Par suite $x\mapsto xu(x)^2$ admet des limites finies quand $x\to\pm\infty$. Or cette fonction est elle-même intégrable sur $\mathbb{R}$ donc ses limites en $\pm\infty$ ne peuvent qu'être nulles.
b) Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u'(x)^2\,\mathrm{d}x \int_{-\infty}^{+\infty} x^2u(x)^2\mathrm{d}x \geqslant \left(\int_{-\infty}^{+\infty} xu'(x)u(x)\,\mathrm{d}x\right)^2$$

Or par intégration par parties

$$\int_{-n}^{n} xu'(x)u(x)\,\mathrm{d}x = \left[xu^2(x)\right]_{-n}^{n} - \int_{-n}^{n} u(x)(u(x)+xu'(x))\,\mathrm{d}x \text{ donc}$$

Ainsi

$$\int_{-n}^{n} xu'(x)u(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[xu^2(x)\right]_{-n}^{n} - \frac{1}{2}\int_{-n}^{n} u^2(x)\,\mathrm{d}x$$

puis à la limite

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xu'(x)u(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} u^2(x)\,\mathrm{d}x$$

et enfin l'inégalité voulue.

Exercice 74 : [énoncé]
La fonction $f : t \mapsto \ln\left(1 + t^2/t^2\right)$ est définie et continue sur $I =]0, +\infty[$.
On a

$$\sqrt{t}f(t) \xrightarrow[t\to 0^+]{} 0 \text{ et } f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$$

donc f est intégrable et l'intégrale étudiée converge.
Par intégration par parties justifiée par la convergence des deux intégrales écrites

$$\int_0^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) \mathrm{d}t = \left[t\ln\left(1 + 1/t^2\right)\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2} = \pi$$

Exercice 75 : [énoncé]
Notons que l'intégrale I_n est bien définie.
a) On découpe l'intégrale en deux

$$I_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^n} + \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^n}$$

On réalise le changement de variable $x = 1/t$ sur la deuxième intégrale

$$I_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^n} + \int_1^0 -\frac{t^{n-2}\,\mathrm{d}t}{1+t^n}$$

puis on combine les deux intégrales pour obtenir

$$I_n = \int_0^1 \frac{1+t^{n-2}}{1+t^n}\,\mathrm{d}t$$

b) On peut écrire

$$I_n = 1 + \int_0^1 \frac{t^{n-2}-t^n}{(1+t^n)}\,\mathrm{d}t$$

D'une part

$$\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\int_0^1 t\frac{nt^{n-1}}{1+t^n}\,\mathrm{d}t$$

ce qui donne par intégration par parties

$$\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\ln 2 - \frac{1}{n}\int_0^1 \ln(1+t^n)\,\mathrm{d}t$$

avec

$$0 \leqslant \int_0^1 \ln(1+t^n)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1} \to 0$$

D'une part

$$\int_0^1 \frac{t^{n-2}}{1+t^n}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\int_{]0,1]} \frac{1}{t}\frac{nt^{n-1}}{1+t^n}\,\mathrm{d}t$$

avec par intégration par parties

$$\int_\varepsilon^1 \frac{1}{t}\frac{nt^{n-1}}{1+t^n}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\ln(1+t^n)}{t}\right]_\varepsilon^1 + \int_\varepsilon^1 \frac{\ln(1+t^n)}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

Quand $\varepsilon \to 0^+$, on obtient

$$\int_{]0,1]} \frac{1}{t}\frac{nt^{n-1}}{1+t^n}\,\mathrm{d}t = \ln 2 + \int_{]0,1]} \frac{\ln(1+t^n)}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

où, sachant $\ln(1+u) \leqslant u$,

$$0 \leqslant \int_{]0,1]} \frac{\ln(1+t^n)}{t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t^{n-2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n-1} \to 0$$

On en déduit

$$I_n = 1 + o(1/n)$$

Exercice 76 : [énoncé]
La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{(1+x^3)^{n+1}}$ est définie et continue sur $[0, +\infty[$. Puisque $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x^{3n+3}}$, la fonction f est intégrable sur $[0, +\infty[$ et l'intégrale J_n converge.
a) Via une décomposition en éléments simples $J_0 = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$.
b) $J_n - J_{n+1} = \int_0^{+\infty} x \times \frac{x^2}{(1+x^3)^{n+2}}\mathrm{d}x$. En procédant à une intégration par parties justifiée par deux convergences : $J_{n+1} = \frac{3n-1}{3n}J_n$.
c) On pose $v_n = \sqrt[3]{n}J_n$.

$$\ln v_{n+1} - \ln v_n = \ln \sqrt[3]{1 + \frac{1}{n}} + \ln\left(1 - \frac{1}{3n}\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

donc la série de terme général $\ln v_{n+1} - \ln v_n$ converge et donc la suite de terme général $\ln v_n$ converge vers une certain réel ℓ. En posant $A = \mathrm{e}^\ell > 0$, on obtient $v_n \to A$ donc $J_n \sim \frac{A}{\sqrt[3]{n}}$.

Exercice 77 : [énoncé]
a) La fonction
$$f : t \mapsto \frac{t - [t]}{t(t+n)}$$
est définie et continue par morceaux sur $]0, +\infty[$.
Quand $t \to 0^+$,
$$f(t) = \frac{t}{t(t+n)} = \frac{1}{t+n} \to \frac{1}{n}$$
Quand $t \to +\infty$,
$$f(t) = \frac{O(1)}{t(t+n)} = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$$
On en déduit que f est intégrable sur $]0, +\infty[$.
b) On remarque que
$$\frac{1}{t(t+n)} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+n}\right)$$
et on en déduit
$$\int_0^A \frac{t-[t]}{t(t+n)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\int_0^A \frac{t-[t]}{t} - \frac{t-[t]}{t+n}\,\mathrm{d}t$$
Par linéarité de l'intégrale et changement de variable, on obtient
$$\int_0^A \frac{t-[t]}{t(t+n)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\left(\int_0^A \frac{t-[t]}{t}\,\mathrm{d}t - \int_n^{A+n} \frac{t-[t]}{t}\,\mathrm{d}t\right)$$
Enfin par la relation de Chasles
$$\int_0^A \frac{t-[t]}{t(t+n)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\left(\int_0^n \frac{t-[t]}{t}\,\mathrm{d}t - \int_A^{A+n} \frac{t-[t]}{t}\,\mathrm{d}t\right)$$
Puisque
$$0 \leqslant \int_A^{A+n} \frac{t-[t]}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{A}\int_A^{A+n} t-[t]\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{n}{A}$$
on obtient quand $A \to +\infty$
$$u_n = \frac{1}{n}\int_0^n \frac{t-[t]}{t}\,\mathrm{d}t$$
c)
$$v_n = \int_0^n \frac{t-[t]}{t}\,\mathrm{d}t$$
Par suite
$$v_n - v_{n-1} = \int_{n-1}^n \frac{t-[t]}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{u}{u+(n-1)}\,\mathrm{d}u$$
puis
$$v_n - v_{n-1} = 1 - (n-1)\ln\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)$$
Par développement limité, on obtient
$$v_n - v_{n-1} = \frac{1}{2(n-1)} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
On en déduit que la série de terme général
$$v_n - v_{n-1} - \frac{1}{2n} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
d) Posons
$$S = \sum_{n=2}^{+\infty}\left(H(n) - H(n-1) - \frac{1}{2n}\right)$$
On a
$$\sum_{k=1}^{n}\left(v_k - v_{k-1} - \frac{1}{2k}\right) = S + o(1)$$
donc
$$v_n - v_1 - \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} = S + o(1)$$
Sachant
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$$
on obtient
$$v_n \sim \frac{\ln n}{2}$$
puis
$$u_n \sim \frac{\ln n}{2n}$$

Exercice 78 : [énoncé]
a) 0, cf. lemme de Lebesgue.
b) Posons

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2nt)\cos t}{\sin t}\,\mathrm{d}t$$

Cette intégrale existe car un prolongement par continuité est possible en 0.
On observe

$$\sin(2(n+1)t) - \sin(2nt) = 2\sin t\cos(2n+1)t$$

et donc

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^{\pi/2} 2\cos((2n+1)t)\cos t\,\mathrm{d}t = 0$$

La suite (I_n) est constante égale à

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} 2\cos^2 t\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$$

c) On a

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2nt)\cos t}{\sin t}\,\mathrm{d}t - \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2nt)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \sin(2nt) f(t)\,\mathrm{d}t$$

avec

$$f(t) = \cot t - \frac{1}{t}$$

qui se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi/2]$.
Ainsi

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2nt)}{t}\,\mathrm{d}t \to \frac{\pi}{2}$$

Or

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2nt)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{n\pi} \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u$$

donc la convergence de l'intégrale de Dirichlet étant supposée connue, on obtient

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$$

d) On a

$$\int_0^{\pi/2} \ln(2\sin(t/2))\cos(nt)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \ln\left(\frac{\sin(t/2)}{t/2}\right)\cos(nt)\,\mathrm{d}t + \int_0^{\pi/2} \ln(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t$$

Par intégration par parties,

$$\int_0^{\pi/2} \ln(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t = \frac{\ln(\pi/2)\sin(n\pi/2)}{n} - \frac{1}{n}\int_0^{n\pi/2} \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u$$

La fonction $t \mapsto \ln\left(\frac{\sin(t/2)}{t/2}\right)$ se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0, \pi/2]$.
Par intégration par parties,

$$\int_0^{\pi/2} \ln\left(\frac{\sin(t/2)}{t/2}\right)\cos(nt)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\ln\left(\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\right)\sin(n\pi/2) - \frac{1}{n}\int_0^{\pi/2}\left(\ln\left(\frac{\sin(t/2)}{t/2}\right)\right)' \sin(n$$

La fonction $t \mapsto \left(\ln\left(\frac{\sin(t/2)}{t/2}\right)\right)'$ étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi/2]$, on a

$$\frac{1}{n}\int_0^{\pi/2}\left(\ln\left(\frac{\sin(t/2)}{t/2}\right)\right)'\sin(nt)\,\mathrm{d}t = o\left(\frac{1}{n}\right)$$

et donc

$$\int_0^{\pi/2} \ln(2\sin(t/2))\cos(nt)\,\mathrm{d}t \sim \frac{(\ln 2)\sin(n\pi/2) - \pi}{2n}$$

Exercice 79 : [énoncé]
La fonction intégrée est définie et continue par morceaux sur $]0, +\infty[$.
Elle se prolonge par continuité par la valeur 1 en 0 et est donc intégrable sur $]0, 1]$
Par une intégration par parties

$$\int_1^A \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{-\cos t}{t}\right]_1^A + \int_1^A \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

Or il y a convergence des deux termes en second membre quand $A \to +\infty$, donc il y a convergence de

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$$

et finalement l'intégrale étudiée converge.

Exercice 80 : [énoncé]
Par intégration par parties

$$\int_\varepsilon^A \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1-\cos t}{t}\right]_\varepsilon^A + \int_\varepsilon^A \frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

Or il y a convergence des deux termes en second membre quand $\varepsilon \to 0^+$ et $A \to +\infty$ donc il y a convergence de l'intégrale en premier membre et on a l'égalité

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

Puisque $1-\cos t = 2\sin^2(t/2)$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} 2\frac{\sin^2(t/2)}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

Enfin par le changement de variable $u = t/2$ sous-jacent à une bijection de classe $\mathcal{C}^1$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 u}{u^2}\,\mathrm{d}u$$

Exercice 81 : [énoncé]
Commençons par étudier la convergence de la suite (S_n) de terme général

$$S_n = \int_0^{n\pi} f(t)\sin(t)\,\mathrm{d}t$$

Par la relation de Chasles, on peut découper l'intégrale

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(t)\sin(t)\,\mathrm{d}t$$

Par translation de la variable

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(t)\sin(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi} f(t+k\pi)\sin(t+k\pi)\,\mathrm{d}t = (-1)^k v_k$$

avec

$$v_k = \int_0^{\pi} f(t+k\pi)\sin(t)\,\mathrm{d}t$$

Puisque f est positive, la suite (v_k) est à termes positifs.
Puisque f est décroissante, la suite (v_k) est décroissante.
Enfin, puisque f tend vers 0 en $+\infty$ et puisque

$$0 \leqslant v_k \leqslant f(k\pi)\pi$$

la suite (v_n) tend vers 0.

Par le critère spécial des séries alternées, on obtient que la série de terme général $(-1)^k v_k$ converge, autrement dit, que la suite (S_n) converge. Notons S sa limite.
Soit $X \geqslant 0$. En notant n_X la partie entière de X/π, on peut écrire

$$\int_0^X f(t)\sin(t)\,\mathrm{d}t = S_{n_X} + \int_{n_X\pi}^X f(t)\,\mathrm{d}t$$

avec

$$0 \leqslant \int_{n_X\pi}^X f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{n_X\pi}^X f(n_X\pi)\,\mathrm{d}t = f(n_X\pi)(X - n_X\pi) \leqslant f(n_X\pi)\pi$$

Quand $X \to +\infty$, on a $n_X \to +\infty$, $S_{n_X} \to S$ et par l'encadrement qui précède

$$\int_{n_X\pi}^X f(t)\,\mathrm{d}t \to 0$$

On en déduit

$$\int_0^X f(t)\sin(t)\,\mathrm{d}t \to S$$

Exercice 82 : [énoncé]
Par intégration par parties

$$\int_0^x \sin(\mathrm{e}^t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \mathrm{e}^t\sin(\mathrm{e}^t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \left[-\cos(\mathrm{e}^t)\mathrm{e}^{-t}\right]_0^x - \int_0^x \cos(\mathrm{e}^t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

D'une part

$$\cos(\mathrm{e}^x)\mathrm{e}^{-x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

et d'autre part $t \mapsto \cos(\mathrm{e}^t)\mathrm{e}^{-t}$ est intégrable sur $[0,+\infty]$ car

$$t^2\cos(\mathrm{e}^t)\mathrm{e}^{-t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$$

donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} \sin(\mathrm{e}^t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Exercice 83 : [énoncé]
$f : t \mapsto \cos(t^2)$ est définie et continue par morceaux sur $[0,+\infty[$.
Formellement

$$\int_0^{+\infty} \cos(t^2)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{2t}{2t}\cos(t^2)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\sin(t^2)}{2t}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{\sin t^2}{2t^2}\,\mathrm{d}t$$

Puisque le crochet converge et que $t \mapsto \frac{\sin t^2}{2t^2}$ est aisément intégrable sur $]0,+\infty[$, l'intégration par parties est justifiée par deux convergences et $\int_0^{+\infty} \cos(t^2)\,\mathrm{d}t$ converge.
Idem pour $\int_0^{+\infty} \sin(t^2)\,\mathrm{d}t$ en proposant une primitive de $2t\sin(t^2)$ en $1-\cos t^2$.

Exercice 84 : [énoncé]
Par un argument de parité, il suffit d'établir la convergence de

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{it^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{2t}{2t}\mathrm{e}^{it^2}\,\mathrm{d}t$$

Formellement

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{it^2}\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2t}{2t}\mathrm{e}^{it^2}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\mathrm{e}^{it^2}-1}{2it}\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{2i}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{it^2}-1}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

où la primitive de $2t\mathrm{e}^{it^2}$ a été choisie de sorte de s'annuler en 0.
Puisque les deux termes en second membre sont convergents, le théorème d'intégration par parties s'applique et assure la convergence de

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{it^2}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 85 : [énoncé]
Procédons au changement de variable de classe $\mathcal{C}^1$, $t = \sqrt{\lambda}x$

$$f(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int_0^{\sqrt{\lambda}} \mathrm{e}^{it^2}\,\mathrm{d}t$$

Or par le changement de variable $u = t^2$

$$\int_0^A \mathrm{e}^{it^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{A^2} \frac{\mathrm{e}^{iu}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$$

puis par intégration par parties

$$\int_0^A \mathrm{e}^{it^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(\left[\frac{\mathrm{e}^{iu}-1}{i\sqrt{u}}\right]_0^A + \frac{1}{2}\int_0^{A^2} \frac{\mathrm{e}^{iu}-1}{iu^{3/2}}\,\mathrm{d}u\right)$$

et donc

$$\int_0^A \mathrm{e}^{it^2}\,\mathrm{d}t = \frac{i}{4}\int_0^{A^2} \frac{1-\mathrm{e}^{iu}}{u^{3/2}}\,\mathrm{d}u$$

L'intégrale en second membre converge donc

$$\int_0^A \mathrm{e}^{it^2}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[A\to+\infty]{} C$$

De plus, la partie imaginaire de C est strictement positive en vertu de l'expression intégrale précédente, donc

$$f(\lambda) \underset{\lambda\to+\infty}{\sim} \frac{C}{\sqrt{\lambda}}$$

Le calcul explicite de C est difficile, cf. intégrale de Fresnel.

Exercice 86 : [énoncé]
a) Pour $x > a > 0$

$$\int_a^x \mathrm{e}^{it^2}\,\mathrm{d}t = \int_a^x \frac{2it}{2it}\mathrm{e}^{it^2}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\mathrm{e}^{it^2}-1}{2it}\right]_a^x + \int_a^x \frac{\mathrm{e}^{it^2}-1}{2it^2}\,\mathrm{d}t$$

A la limite quand $a \to 0$,

$$\int_a^x \mathrm{e}^{it^2}\,\mathrm{d}t \to \int_0^x \mathrm{e}^{it^2}\,\mathrm{d}t,\ \frac{\mathrm{e}^{ia^2}-1}{2ia} \sim \frac{a}{2} \to 0$$

et

$$\int_a^x \frac{\mathrm{e}^{it^2}-1}{2it^2}\,\mathrm{d}t \to \int_0^x \frac{\mathrm{e}^{it^2}-1}{2it^2}\,\mathrm{d}t$$

car cette dernière intégrale converge.
Ainsi

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^{ix^2}-1}{2ix} + \frac{1}{2i}\int_0^x \frac{\mathrm{e}^{it^2}-1}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

Puisque

$$\left|\frac{\mathrm{e}^{ix^2}-1}{2ix}\right| \leqslant \frac{1}{x} \to 0 \text{ et } \int_0^x \frac{\mathrm{e}^{it^2}-1}{2it^2}\,\mathrm{d}t \to \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{it^2}-1}{2it^2}\,\mathrm{d}t$$

car cette dernière intégrale converge.
Par suite

$$f(x) \to \lambda = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{it^2}-1}{2it^2}\mathrm{d}t$$

b)

$$g(x) = \lambda - f(x) = \frac{1}{2i}\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{it^2}-1}{t^2}\,\mathrm{d}t - \frac{\mathrm{e}^{ix^2}-1}{2ix}$$

donc

$$g(x)=\frac{1}{2i}\int_x^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{it^2}}{t^2}\,\mathrm{d}t-\frac{1}{2i}\int_x^{+\infty}\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t-\frac{\mathrm{e}^{ix^2}-1}{2ix}$$

car ces deux dernières intégrales sont bien définies. Par suite

$$g(x)=\frac{1}{2i}\int_x^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{it^2}}{t^2}\,\mathrm{d}t-\frac{\mathrm{e}^{ix^2}}{2ix}$$

c) Par intégration par parties généralisée

$$\int_x^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{it^2}\mathrm{d}t}{t^2}=\int_x^{+\infty}\frac{t\mathrm{e}^{it^2}\mathrm{d}t}{t^3}=\left[\frac{\mathrm{e}^{it^2}}{2it^3}\right]_x^{+\infty}+\frac{3}{2i}\int_x^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{it^2}\mathrm{d}t}{t^4}$$

Par suite

$$\left|\int_x^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{it^2}\mathrm{d}t}{t^2}\right|=\left|-\frac{\mathrm{e}^{ix^2}}{2ix^3}+\frac{3}{2i}\int_x^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{it^2}\mathrm{d}t}{t^4}\right|\leqslant\frac{1}{2x^3}+\frac{3}{2}\int_x^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^4}=\frac{1}{x^3}$$

Donc

$$\int_x^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{it^2}\mathrm{d}t}{t^2}=O\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

Exercice 87 : [énoncé]
Soit F la primitive de f s'annulant en 0. Par hypothèse

$$F(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}\ell=\int_0^{+\infty}f(t)\,\mathrm{d}t$$

Par intégration par parties, on peut écrire

$$\frac{1}{x}\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t=F(x)-\frac{1}{x}\int_0^x F(t)\,\mathrm{d}t$$

Or

$$\left|\frac{1}{x}\int_0^x F(t)\,\mathrm{d}t-\ell\right|\leqslant\frac{1}{x}\int_0^x|F(t)-\ell|\,\mathrm{d}t$$

Soit $\varepsilon>0$. Il existe $A\in\mathbb{R}^+$ tel que

$$\forall t\geqslant A,|F(t)-\ell|\leqslant\varepsilon$$

Par continuité sur $[0,A]$, $|F(t)-\ell|$ est majorée par un certain $M>0$.

Pour $x\geqslant\max(A,AM/\varepsilon)$ on a

$$\frac{1}{x}\int_0^x|F(t)-\ell|\,\mathrm{d}t=\frac{1}{x}\int_0^A|F(t)-\ell|\,\mathrm{d}t+\frac{1}{x}\int_A^x|F(t)-\ell|\,\mathrm{d}t\leqslant2\varepsilon$$

Par conséquent

$$\frac{1}{x}\int_0^x F(t)\,\mathrm{d}t\xrightarrow[x\to+\infty]{}\ell$$

puis

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t=0$$

Notons que sans l'hypothèse d'intégrabilité de f, on ne peut pas exploiter le théorème de convergence dominée.

Exercice 88 : [énoncé]
Supposons la convergence de l'intégrale de f sur $[1,+\infty[$.
Puisque f est continue, on peut introduire une primitive F de f et celle-ci admet donc une limite finie en $+\infty$. Par intégration par parties

$$\int_1^A\frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t=\left[\frac{F(t)}{t}\right]_1^A+\int_1^A\frac{F(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

Or $F(A)/A\xrightarrow[A\to+\infty]{}0$ et $t\mapsto F(t)/t^2$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ car F est bornée au voisinage de $+\infty$.
On en déduit donc par opérations la convergence de l'intégrale de $t\mapsto f(t)/t$ sur $[1,+\infty[$.

Exercice 89 : [énoncé]
Soit F une primitive de la fonction continue f sur $[0,+\infty[$. Formellement

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(t)}{t^\alpha+1}\,\mathrm{d}t=\left[\frac{F(t)}{t^\alpha+1}\right]_0^{+\infty}+\alpha\int_0^{+\infty}\frac{F(t)t^{\alpha-1}}{(t^\alpha+1)^2}\,\mathrm{d}t$$

Supposons la convergence de $\int_0^{+\infty}f(t)\,\mathrm{d}t$. La primitive F est alors convergente en $+\infty$ et donc dans l'intégration par parties précédente, le crochet est convergent en $+\infty$.
De plus, la fonction F est bornée car continue sur $[0,+\infty[$ et convergente en $+\infty$.
Par suite, quand $t\to+\infty$,

$$\frac{F(t)t^{\alpha-1}}{(t^\alpha+1)^2}=O\left(\frac{1}{t^{\alpha+1}}\right)$$

et puisque $\alpha > 0$, on a la convergence de la deuxième intégrale dans la formule d'intégration par parties précédente.
Par le théorème d'intégration par parties, on peut affirmer que $\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{1+t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ converge.

Exercice 90 : [énoncé]
Quitte à considérer la nouvelle fonction $t \mapsto f(t)\mathrm{e}^{-s_0 t}$, on peut supposer $s_0 = 0$.
Introduisons F une primitive de la fonction continue f sur $[0, +\infty[$.
La fonction F converge en $+\infty$ par hypothèse de convergence de l'intégrale.
La fonction F étant continue et de limite finie en l'infini, on montre aisément qu'elle est bornée sur $\mathbb{R}^+$.
Par une intégration par parties,

$$\int_0^A f(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t = \left[F(t)\mathrm{e}^{-st}\right]_0^A + s\int_0^A F(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t$$

Puisque la fonction F est bornée,

$$F(A)\mathrm{e}^{-sA} \xrightarrow[A\to+\infty]{} 0$$

et $t \mapsto F(t)\mathrm{e}^{-st}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ car

$$F(t)\mathrm{e}^{-st} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(1/t^2\right)$$

On en déduit que l'intégrale $\int_0^A f(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie quand $A \to +\infty$, c'est-à-dire que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t$ converge.

Exercice 91 : [énoncé]
Posons

$$G(x) = \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$$

Par intégration par parties

$$\int_a^x f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = [f(t)G(t)]_a^x - \int_a^x f'(t)G(t)\,\mathrm{d}t$$

D'une part

$$[f(t)G(t)] = f(x)G(x) - f(a)G(a) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

car G est bornée et f de limite nulle en $+\infty$.

D'autre part, il y a convergence de l'intégrale $\int_a^{+\infty} f'(t)G(t)\,\mathrm{d}t$. En effet

$$\int_a^x |f'(t)G(t)|\,\mathrm{d}t = \int_a^x -f'(t)\,|G(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^x -f'(t)M\,\mathrm{d}t = (f(a) - f(x))\,M$$

Ainsi

$$\int_a^x |f'(t)G(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant f(a)M$$

Ses intégrales partielles étant majorées, il y a convergence de $\int_a^{+\infty} |f'(t)G(t)|\,\mathrm{d}t$.
Ainsi $f'G$ est intégrable sur $[a, +\infty[$. On peut alors conclure

$$\int_a^x f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} \int_a^{+\infty} f'(t)G(t)\,\mathrm{d}t$$

Exercice 92 : [énoncé]
a) Pour $a \leqslant 0$, l'intégrale n'est pas définie. Pour $a > 0$, $\frac{1}{t^a+1} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^a}$, par suite $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^a+1}$ n'est définie que pour $a > 1$. Finalement f est définie sur $]1, +\infty[$.
b) Si $1 < a \leqslant b$ alors

$$\forall t \geqslant 1, \frac{1}{t^b+1} \leqslant \frac{1}{t^a+1}$$

donc $f(b) \leqslant f(a)$. Ainsi f est décroissante.

$$0 \leqslant f(a) \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^a} = \frac{1}{1-a}\left[\frac{1}{t^{a-1}}\right]_1^{+\infty} = \frac{1}{a-1} \xrightarrow[a\to+\infty]{} 0$$

Exercice 93 : [énoncé]
a) $t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} \underset{t\to0^+}{\sim} t^{x-1}$ et $t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} = \underset{+\infty}{O}\left(1/t^2\right)$ la fonction $t \mapsto t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ et par suite $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ est bien définie pour $x > 0$.
b) Pour $x > 1$, les deux intégrales étant définies :

$$\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = \left[-t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\right]_0^{+\infty} + (x-1)\int_0^{+\infty} t^{x-2}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$$

Ainsi $\forall x > 1, \Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1)$.
$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = 1$. Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^\star$,

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

Exercice 94 : [énoncé]
a) La fonction $t \mapsto \frac{t^{x-1}}{1+t}$ est définie et continue sur $]0,1]$ et $\frac{t^{x-1}}{1+t} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{t^{1-x}}$.
Par équivalence de fonctions positives, l'intégrale définissant $f(x)$ existe si, et seulement si, $x > 0$.
b) Pour $x \leqslant y$, on a

$$\forall t \in \left]0,1\right], \frac{t^{x-1}}{1+t} \geqslant \frac{t^{y-1}}{1+t}$$

puis en intégrant $f(x) \geqslant f(y)$.
La fonction f est donc décroissante.
c) On a

$$f(x) + f(x+1) = \int_0^1 t^{x-1}\mathrm{d}t = \frac{1}{x}$$

d) Puisque f est décroissante et positive, f converge en $+\infty$. Posons ℓ sa limite.
En passant à la limite la relation obtenue ci-dessus, on obtient $2\ell = 0$ donc $\ell = 0$.
Par décroissance

$$f(x) + f(x+1) \leqslant 2f(x) \leqslant f(x-1) + f(x)$$

donc

$$\frac{1}{x} \leqslant 2f(x) \leqslant \frac{1}{x-1}$$

On en déduit

$$f(x) \sim \frac{1}{2x}$$

d) c) Quand $x \to 0^+$,

$$0 \leqslant f(x+1) = \int_0^1 \frac{t^x}{1+t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t^x\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x+1} \leqslant 1$$

donc

$$f(x+1) \underset{x\to 0^+}{=} O(1) = o(1/x)$$

et par suite

$$f(x) = 1/x - f(x+1) \underset{x\to 0^+}{\sim} 1/x \to +\infty$$

Exercice 95 : [énoncé]
a) Par intégration par parties,

$$\left|\int_0^A \varphi(t)\cos(xt)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{|\varphi(0)| + |\varphi(A)|}{x} + \frac{1}{x}\int_0^A |\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t$$

qui permet de conclure.
b) Pour $\varepsilon > 0$, il existe $A \in \mathbb{R}^+$ tel que

$$\int_A^{+\infty} |\varphi(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \varepsilon$$

car φ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$. De plus, pour x assez grand,

$$\left|\int_0^A \varphi(t)\cos(xt)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \varepsilon$$

donc

$$\left|\int_0^{+\infty} \varphi(t)\cos(xt)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant 2\varepsilon$$

ce qui permet de conclure.

Exercice 96 : [énoncé]
a) Quand $t \to +\infty$, $\mathrm{e}^{-t}/t = O(\mathrm{e}^{-t})$ donc $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}/t$ est intégrable sur tout $[x,+\infty[\, \subset\,]0,+\infty[$.
b)

$$F(x) = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t - \int_1^x \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t = F(1) - \int_1^x \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$$

est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^{+\star}$ et $F'(x) = -\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}$.
c) Quand $x \to +\infty$

$$0 \leqslant xF(x) = \int_x^{+\infty} \frac{x\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t - \int_1^x \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \to 0$$

Quand $x \to 0$

$$xF(x) = x\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t = x\left(\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t + \int_x^1 \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\mathrm{d}t\right)$$

donc

$$0 \leqslant xF(x) \leqslant x\left(F(1) + \int_x^1 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t\right) \leqslant xF(1) + x\ln x \to 0$$

d) Par intégration par parties formelle

$$\int_0^{+\infty} F(x)\,\mathrm{d}x = [xF(x)]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$$

L'intégration par parties est justifiée par deux convergences et finalement

$$\int_0^{+\infty} F(t)\,\mathrm{d}t = 1$$

Exercice 97 : [énoncé]
a) La fonction $t \mapsto \sin(t)/t$ est définie et continue par morceaux sur $]0,+\infty[$. On peut la prolonger par continuité en 0 en y posant la valeur 1. Par intégration par parties où l'on intègre l'expression $\sin t$ en $1-\cos t$

$$\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1-\cos t}{t}\right]_0^x + \int_0^x \frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

Quand $x \to +\infty$, on a

$$\frac{1-\cos x}{x} \to 0$$

et

$$\int_0^x \frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t \to \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

cette dernière intégrale étant convergente car la fonction peut être prolongée par continuité en 0 et est dominée par la fonction intégrable $t \mapsto 1/t^2$ en $+\infty$.
b) Soit F la primitive s'annulant en 0 du prolongement par continuité de $t \mapsto \sin(t)/t$. On a

$$f(x) = \lim_{+\infty} F - F(x)$$

Puisque la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$, la fonction f est aussi de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$$f'(x) = -F'(x) = -\frac{\sin x}{x}$$

c) Par intégration par parties,

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = [tf(t)]_0^x - \int_0^x tf'(t)\,\mathrm{d}t = xf(x) + \int_0^x \sin t\,\mathrm{d}t$$

Or

$$\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{\cos t}{t}\right]_x^{+\infty} - \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

donc

$$xf(x) = \cos x - x\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

puis

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = 1 - x\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

Mais par intégration par parties on établit encore

$$\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\sin t}{t^2}\right]_x^{+\infty} - 2\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t^3}\,\mathrm{d}t$$

avec

$$\left|\int_x^{+\infty} 2\frac{\sin t}{t^3}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_x^{+\infty} \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^3} = \frac{1}{x^2}$$

ce qui permet d'affirmer

$$x\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

Finalement $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et

$$\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$$

Exercice 98 : [énoncé]
a)

$$f : t \mapsto \frac{t}{\sqrt{t^3-1}} = \frac{t}{\sqrt{(t-1)(t^2+t+1)}}$$

est définie et continue sur $]1,x]$ et

$$f(t) \underset{1}{\sim} \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{t-1}}$$

donc $F(x)$ existe.
F est primitive de la fonction continue f sur $]1,+\infty[$ donc F est de classe $\mathcal{C}^1$ et $F'(x) = f(x)$.
Comme f est de classe $\mathcal{C}^\infty$, F est finalement de classe $\mathcal{C}^\infty$ et sur $]1,+\infty[$

$$F'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^3-1}}$$

b) F est continue en 1 et $F'(x) \xrightarrow[x\to1]{} +\infty$. Tangente verticale en 1.
c) $\sqrt{t^3-1} \leqslant t^{3/2}$ donc

$$F(x) \geqslant \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{x} - 2 \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$$

donc $F(x) \xrightarrow[+\infty]{} +\infty$.
d) F est continue et strictement croissante sur $[1,+\infty[$ donc F réalise une bijection de $[1,+\infty[$ sur $[0,+\infty[$.

F réalise une bijection de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $]1,+\infty[$ sur $]0,+\infty[$ avec $F'(x)\neq 0$ donc F^{-1} est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$.

$$(F^{-1})' = \frac{1}{F'\circ F^{-1}} = \frac{\sqrt{(F^{-1})^3-1}}{F^{-1}}$$

donc F^{-1} est solution de l'équation différentielle considérée.
e) F^{-1} est continue en 0 et $F^{-1}(0)=1$. En vertu de la relation

$$(F^{-1})' = \frac{\sqrt{(F^{-1})^3-1}}{F^{-1}}$$

on obtient

$$(F^{-1})'(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

F^{-1} est donc dérivable en 0 et $(F^{-1})'(0)=0$

Exercice 99 : [énoncé]
a) Soient $x,y>0$.
La fonction

$$f : t\mapsto \frac{t-[t]}{t(t+x)}$$

est définie et continue par morceaux sur $]0,+\infty[\supset]0,y]$ et quand $t\to 0$,

$$f(t) = \frac{t}{t(t+x)} = \frac{1}{t+x}\to\frac{1}{x}$$

donc f est prolongeable par continuité en 0.
Par suite l'intégrale définissant $G(x,y)$ existe bien.
b) Quand $t\to+\infty$,

$$f(t) = \frac{O(1)}{t(t+x)} = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

donc f est intégrable sur $]0,+\infty[$.
Par suite $G(x,y)$ converge quand $y\to+\infty$ vers

$$G(x) = \int_0^{+\infty}\frac{t-[t]}{t(t+x)}\,\mathrm{d}t$$

c) On remarque que

$$\frac{1}{t(t+n)} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+n}\right)$$

et on en déduit

$$G(n,y) = \frac{1}{n}\int_0^y \frac{t-[t]}{t}-\frac{t-[t]}{t+n}\,\mathrm{d}t$$

Par linéarité de l'intégrale et changement de variable, on obtient

$$G(n,y) = \frac{1}{n}\left(\int_0^y\frac{t-[t]}{t}\,\mathrm{d}t - \int_n^{y+n}\frac{t-[t]}{t}\,\mathrm{d}t\right)$$

Enfin par la relation de Chasles

$$G(n,y) = \frac{1}{n}\left(\int_0^n\frac{t-[t]}{t}\,\mathrm{d}t - \int_y^{y+n}\frac{t-[t]}{t}\,\mathrm{d}t\right)$$

d) Puisque

$$0\leqslant\int_y^{y+n}\frac{t-[t]}{t}\,\mathrm{d}t\leqslant\frac{1}{y}\int_y^{y+n}t-[t]\,\mathrm{d}t\leqslant\frac{n}{y}$$

on obtient quand $y\to+\infty$

$$G(n) = \frac{1}{n}\int_0^n\frac{t-[t]}{t}\,\mathrm{d}t$$

et on a alors

$$H(n) = \int_0^n\frac{t-[t]}{t}\,\mathrm{d}t$$

Par suite

$$H(n)-H(n-1) = \int_{n-1}^n\frac{t-[t]}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^1\frac{u}{u+(n-1)}\,\mathrm{d}u$$

puis

$$H(n)-H(n-1) = 1-(n-1)\ln\left(1+\frac{1}{n-1}\right)$$

Par développement limité, on obtient

$$H(n)-H(n-1) = \frac{1}{2(n-1)}+O\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

On en déduit que la série de terme général

$$H(n)-H(n-1)-\frac{1}{2n} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Posons

$$S = \sum_{n=2}^{+\infty}\left(H(n)-H(n-1)-\frac{1}{2n}\right)$$

On a
$$\sum_{k=1}^{n}\left(H(k)-H(k-1)-\frac{1}{2k}\right)=S+o(1)$$
donc
$$H(n)-H(1)-\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}=S+o(1)$$
Sachant
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\ln n+\gamma+o(1)$$
on obtient
$$H(n)\sim\frac{1}{2}\ln n$$
puis
$$G(n)\sim\frac{\ln n}{2n}$$

Exercice 100 : [énoncé]
L'intégrale étudiée est convergente puisque $t^2\mathrm{e}^{-t^2}\xrightarrow[t\to+\infty]{}0$.
Ecrivons
$$\int_x^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t=\int_x^{+\infty}\frac{1}{t}\times t\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$
Procédons à un intégration par parties avec $u(t)=-\mathrm{e}^{-t^2}/2$ et $v(t)=1/t$.
Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ et le produit uv converge en $+\infty$. On a donc
$$\int_x^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{2x}-\int_x^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{2t^2}\,\mathrm{d}t$$
Or
$$\frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{2t^2}\underset{t\to+\infty}{=}o\left(\mathrm{e}^{-t^2}\right)$$
donc, par intégration de relation de comparaison
$$\int_x^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{2t^2}\,\mathrm{d}t=o\left(\int_x^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)$$
et donc
$$\int_x^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{2x}$$

Exercice 101 : [énoncé]
L'intégrale étudiée est convergente puisque $t^2\mathrm{e}^{-t}/t\xrightarrow[t\to+\infty]{}0$.
Procédons à une intégration par parties avec $u(t)=-\mathrm{e}^{-t}$ et $v(t)=1/t$.
Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ et le produit uv converge en $+\infty$. On a donc
$$\int_x^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}-\int_x^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^2}\,\mathrm{d}t$$
Or
$$\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^2}\underset{t\to+\infty}{=}o\left(\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\right)$$
donc, par intégration de relation de comparaison
$$\int_x^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^2}\,\mathrm{d}t=o\left(\int_x^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t\right)$$
et donc
$$\int_x^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}$$

Exercice 102 : [énoncé]
Par intégration par parties
$$\int_1^x\frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t=\left[\frac{\mathrm{e}^t}{t}\right]_1^x+\int_1^x\frac{\mathrm{e}^t}{t^2}\,\mathrm{d}t$$
et en répétant celle-ci
$$\int_1^x\frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t=\left[\frac{\mathrm{e}^t}{t}+\frac{\mathrm{e}^t}{t^2}\right]_1^x+\int_1^x2\frac{\mathrm{e}^t}{t^3}\,\mathrm{d}t$$
Or, toujours par intégration par parties
$$\int_1^x2\frac{\mathrm{e}^t}{t^3}\,\mathrm{d}t=\left[\frac{2\mathrm{e}^t}{t^3}\right]_1^x+\int_1^x\frac{6\mathrm{e}^t}{t^4}\,\mathrm{d}t$$
Mais
$$\frac{\mathrm{e}^t}{t^4}\underset{t\to+\infty}{=}o\left(\frac{\mathrm{e}^t}{t^3}\right)\text{ et }t\mapsto\frac{\mathrm{e}^t}{t}\text{ est positive non intégrable sur }[1,+\infty[$$
donc, par intégration de relation de comparaison
$$\int_1^x\frac{\mathrm{e}^t}{t^4}\,\mathrm{d}t=o\left(\int_1^x\frac{\mathrm{e}^t}{t^3}\right)$$

Ceci donne
$$\int_1^x 2\frac{\mathrm{e}^t}{t^3}\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{=} \frac{2\mathrm{e}^x}{x^3} - 2\mathrm{e} + o\left(\int_1^x \frac{\mathrm{e}^t}{t^3}\,\mathrm{d}t\right) \sim \frac{2\mathrm{e}^x}{x^3}$$
puis, dans le calcul initial
$$\int_1^x \frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{=} \frac{\mathrm{e}^x}{x} + \frac{\mathrm{e}^x}{x^2} + \frac{2\mathrm{e}^x}{x^3} + o\left(\frac{2\mathrm{e}^x}{x^3}\right)$$
en ayant intégré le terme constant dans le terme négligeable.

Exercice 103 : [énoncé]
Puisque f est continue en 0, on peut écrire
$$f(x) = f(0) + \varepsilon(x) \text{ avec } \varepsilon \xrightarrow[0]{} 0$$
On a alors
$$\int_{ax}^{bx} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_{ax}^{bx} \frac{f(0)}{t}\,\mathrm{d}t + \int_{ax}^{bx} \frac{\varepsilon(t)}{t}\,\mathrm{d}t$$
D'une part
$$\int_{ax}^{bx} \frac{f(0)}{t}\,\mathrm{d}t = f(0)\ln\frac{b}{a}$$
et d'autre part
$$\left|\int_{ax}^{bx} \frac{\varepsilon(t)}{t}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \max_{t\in[ax,bx]} |\varepsilon(t)| \ln\frac{b}{a} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$
On peut conclure
$$\lim_{x\to 0^+} \int_{ax}^{bx} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t = f(0)\ln\frac{b}{a}$$

Exercice 104 : [énoncé]
Par intégration par parties
$$\int_{\mathrm{e}}^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} = \left[\frac{t}{\ln t}\right]_{\mathrm{e}}^x + \int_{\mathrm{e}}^x \frac{\mathrm{d}t}{(\ln t)^2}$$
Or
$$\frac{1}{(\ln t)^2} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{\ln t}\right)$$
et la fonction $t \mapsto 1/\ln(t)$ est positive non intégrable sur $[\mathrm{e}, +\infty[$. On a donc
$$\int_{\mathrm{e}}^x \frac{\mathrm{d}t}{(\ln t)^2} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\int_{\mathrm{e}}^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}\right)$$
et on en déduit
$$\int_{\mathrm{e}}^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x}{\ln x}$$

Exercice 105 : [énoncé]
a) On a
$$\frac{\ln(t+1)}{t} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(t)}{t}$$
Puisque la fonction $t \mapsto \ln(t)/t$ est positive, non intégrable sur $[1, +\infty[$, on peut affirmer
$$\int_1^x \frac{\ln(t+1)}{t}\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\sim} \int_1^x \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}(\ln t)^2\right]_1^x = \frac{1}{2}(\ln x)^2$$
b) On a
$$\int_1^x \frac{\ln(t+1)}{t}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2}(\ln x)^2 = \int_1^x \frac{\ln(t+1)}{t} - \frac{\ln(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_1^x \frac{1}{t}\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)\,\mathrm{d}t$$
et donc
$$\int_1^x \frac{\ln(t+1)}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + C + o(1)$$
avec la constante C égale à l'intégrale convergente
$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)\,\mathrm{d}t$$
On peut montrer que cette constante vaut $\pi^2/12$ (via intégration terme à terme), mais c'est une autre histoire...
c) En fait
$$\varepsilon(x) = -\int_x^{+\infty} \frac{1}{t}\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)\,\mathrm{d}t$$
On a
$$\frac{1}{t}\ln\left(1+\frac{1}{t}\right) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$$
Puisque la fonction $t \mapsto 1/t^2$ est positive et intégrable sur $[1, +\infty[$, on peut affirmer
$$\varepsilon(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} -\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \frac{1}{x}$$

Exercice 106 : [énoncé]
Puisque f est positive et non intégrable, on sait

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $A \geqslant 0$ tel que

$$\forall x \geqslant A, |f'(x)| \leqslant \varepsilon\,|f(x)|$$

et alors

$$\forall x \geqslant A, f(x) = f(A) + \int_A^x f'(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(A) + \varepsilon\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

Puisque $f(A)$ est une constante et $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$, il existe $A' \geqslant 0$ tel que

$$\forall x \geqslant A', f(A) \leqslant \varepsilon\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

Pour $x \geqslant \max(A, A')$, on obtient

$$0 \leqslant f(x) \leqslant 2\varepsilon\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

et on peut alors conclure.